Дискретная математика
1 часть

Васильева Анастасия Юрьевна

16 января 2005 г.

Оглавление

1 Комбинаторика **5**
1.1 Перестановки и сочетания . . . 5
ОПР 1.1.1 (Перестановок и сочетаний) . . . 5
Лемма 1.1.3 (Количество перестановок с повторениями) . . . 5
Лемма 1.1.4 (Количество перестановок без повторений) . . . 5
1.1.5 Обозначение . . . 6
Лемма 1.1.6 (Количество сочетаний без повторения) . . . 6
Лемма 1.1.7 (Количество сочетаний с повторениями) . . . 6
Лемма 1.1.8 (О двоичных векторах) . . . 6
1.1.9 Свойства C_n^k . . . 6
1.2 Метод включений и исключений . . . 7
1.2.1 Обозначения: . . . 7
Теорема 1.2.3 (Формула включений и исключений) . . . 7
ОПР 1.2.4 (Беспорядка) . . . 8
1.2.5 Задача о беспорядках . . . 8
1.2.6 Задача о супружеских парах . . . 8

2 Булевы функции **9**
2.1 Вводные замечания . . . 9
ОПР 2.1.1 (Булевого куба) . . . 9
ОПР 2.1.2 (Булевой функции) . . . 9
2.1.2.1 Пример количества булевых функций . . . 9
ОПР 2.1.3 (Существенной зависимости от переменной) . . . 9
ОПР 2.1.4 (Равенства булевых функций) . . . 9
ОПР 2.1.5 (Формулы) . . . 9
2.1.5.1 Примеры формул . . . 10
ОПР 2.1.6 (Реализации формулы) . . . 10
ОПР 2.1.7 (Эквивалентности формул) . . . 10
2.1.7.1 Пример эквивалентных формул . . . 10
ОПР 2.1.8 (Принципа двойственности) . . . 10
2.1.8.1 Примеры двойственных функций . . . 10
Теорема 2.1.9 (О двойственных функциях) . . . 10
Замечание 2.1.9.1 (Принцип двойственности) . . . 11
2.1.9.1 Пример применения принципа двойственности . . . 11
2.2 Совершенные нормальные формы . . . 11
2.2.1 Обозначение . . . 11
Теорема 2.2.2 (Свойство булевых функций) . . . 11
Замечание 2.2.2.1 (Первое замечание) . . . 12
Замечание 2.2.2.2 (Совершенная дизъюнктивная нормальная форма (СДНФ)) . . . 12
Теорема 2.2.3 (О представлении функции) . . . 12
Теорема 2.2.4 (Совершенная конъюктивная нормальная форма (СКНФ)) . . . 12
ОПР 2.2.5 (Конъюктивной и дизъюнктивной нормальных формы) . . . 12
2.3 Полнота и замкнутость . . . 13
ОПР 2.3.1 (Функционально полной системы) . . . 13
2.3.1.1 Пример функционально полной системы . . . 13
Теорема 2.3.2 (О полноте подсистемы) . . . 13
ОПР 2.3.4 (Полинома Жегалкина) . . . 13
2.3.4.1 Пример представления в виде полинома Жегалкина . . . 13

Теорема 2.3.5 (О полиноме Жегалкина) . . . 13
ОПР 2.3.6 (Замкнутости) . . . 13
2.3.6.1 Примеры замкнутости и полноты . . . 14
ОПР 2.3.7 (Сравнения булевых векторов) . . . 14
2.3.7.1 Примеры сравнения булевых векторов . . . 14
ОПР 2.3.8 (Основные классы замкнутых функций) . . . 14
Лемма 2.3.9 (О несамодвойственной функции) . . . 14
Лемма 2.3.10 (О немонотонной функции) . . . 15
Лемма 2.3.11 (О нелинейной функции (1)) . . . 15
2.3.11.1 Пример применения леммы 2.3.11 . . . 15
Лемма 2.3.12 (О нелинейной функции (2)) . . . 15
Теорема 2.3.13 (Поста) . . . 15
Теорема 2.3.15 (О числе функций существенно зависящих от n переменных) . . . 16

3 Теория графов **17**
3.1 Введение . . . 17
ОПР 3.1.1 (Понятие графа) . . . 17
Лемма 3.1.2 (О рукопожатиях) . . . 17
ОПР 3.1.3 (Изоморфизм графов) . . . 17
ОПР 3.1.5 (Маршруты, цепи, циклы) . . . 18
ОПР 3.1.6 (Подграфы) . . . 18
ОПР 3.1.8 (Двудольные графы) . . . 19
Теорема 3.1.9 (Критерий двудольности графа Кенига) . . . 19
ОПР 3.1.10 (Разновидности графов) . . . 20
3.2 Способы задания графов . . . 20
ОПР 3.2.1 (Матрица смежности) . . . 20
ОПР 3.2.2 (Приведенная матрица смежности) . . . 21
ОПР 3.2.3 (Матрица инцидентности) . . . 21
3.3 Обходы . . . 21
ОПР 3.3.1 (Эйлеров цикл, эйлеров граф) . . . 21
Теорема 3.3.2 (Эйлера) . . . 21
3.3.3 Алгоритм Флери . . . 22
Теорема 3.3.4 (Алгоритм Флери) . . . 22
ОПР 3.3.5 (Гамильтонов цикл, гамильтонов граф) . . . 22
Теорема 3.3.6 (Дирака) . . . 22
Теорема 3.3.7 (Оре) . . . 23
3.4 Деревья . . . 24
3.4.1 Определение . . . 24
ОПР 3.4.1.1 (Дерево) . . . 24
Теорема 3.4.1.2 (Характеризация деревьев) . . . 24
3.4.2 Кодирование деревьев . . . 25
Лемма 3.4.2.1 (О висячих вершинах дерева) . . . 25
3.4.2.2 Код Прюфера . . . 25
Замечание 3.4.2.2.1 (О коде Прюфера) . . . 25
Теорема 3.4.2.3 (О коде Прюфера) . . . 25
Теорема 3.4.2.4 (Кэли) . . . 26
3.4.2.5 Восстановление дерева по коду Прюфера . . . 27
ОПР 3.4.2.6 (Плоское корневое дерево) . . . 27
3.4.2.7 Кодирование плоских корневых деревьев . . . 27
Теорема 3.4.2.8 (О кодировании плоских корневых деревьев) . . . 27
3.4.3 Непонятно какая тема . . . 28
ОПР 3.4.3.1 (Экцентриситет, диаметр, радиус) . . . 28
ОПР 3.4.3.2 (Центральная вершина, центр графа) . . . 28
Теорема 3.4.3.3 (Центр дерева) . . . 28
3.4.4 Остов графа . . . 28
ОПР 3.4.4.1 (Остов) . . . 28
Теорема 3.4.4.2 (О получении остова) . . . 28
Теорема 3.4.4.3 (Свойства остовов) . . . 29
3.5 Независимость и покрытия . . . 29
3.5.1 Общие понятия . . . 29

ОПР 3.5.1.1 (Независимое множество) . . . 29
ОПР 3.5.1.3 (Паросочетания) . . . 29
ОПР 3.5.1.4 (Вершинное покрытие) . . . 30
ОПР 3.5.1.5 (Реберное покрытие) . . . 30
ОПР 3.5.1.6 (Совершенное паросочетание) . . . 30
Теорема 3.5.1.7 (1. $\alpha_0(G) + \beta_0(G) = |V(G)|$) . . . 30
Теорема 3.5.1.8 (2. $\alpha_1(G) + \beta_1(G) = |V(G)|$) . . . 30
ОПР 3.5.1.9 (Чередующаяся относительно паросочетания цепь) . . . 31
ОПР 3.5.1.10 (Увеличивающаяся относительно паросочетания цепь) . . . 31
Замечание 3.5.1.10.1 (Про чередующиеся цепи) . . . 31
Теорема 3.5.1.11 (Про наибольшее паросочетание) . . . 31
3.5.2 Паросочетания в двудольных графах . . . 31
ОПР 3.5.2.1 (Окружение подмножества вершин) . . . 31
Теорема 3.5.2.2 (Существование паросочетания, покрывающего X) . . . 31
Следствие 3.5.2.3 (Существование паросочетания мощности t) . . . 32
УТВ 3.5.2.4 ($\beta_0(G) \geq \alpha_1(G)$) . . . 32
3.5.3 Система различных представителей . . . 33
ОПР 3.5.3.1 (Система различных представителей(СРП)) . . . 33
ОПР 3.5.3.2 (Условие Холла) . . . 33
Теорема 3.5.3.3 (Холла) . . . 33
Теорема 3.5.3.5 (Холла. Бесконечный случай) . . . 33
Теорема 3.5.3.6 (Кенига о (0, 1)-матрицах) . . . 33
3.5.3.7 Алгоритм поиска СРП . . . 34
Следствие 3.5.3.8 (О СРП) . . . 35
Теорема 3.5.3.9 (Об общих представителях) . . . 35
3.6 Связность графов . . . 35
ОПР 3.6.1 (Число вершинной связанности G) . . . 35
ОПР 3.6.2 (Число реберной связности графа G) . . . 35
ОПР 3.6.3 (Точка сочленения) . . . 35
ОПР 3.6.4 (Мост) . . . 35
ОПР 3.6.5 (Блок) . . . 35
УТВ 3.6.6 ($\lambda(G) \leqslant \delta(G)$) . . . 35
Теорема 3.6.7 (О соотношении чисел связности $æ(G) \leqslant \lambda(G) \leqslant \delta(G)$) . . . 35
ОПР 3.6.8 (k-связный граф) . . . 36
ОПР 3.6.9 (Реберно k-связный граф) . . . 36
ОПР 3.6.10 (k-связная компонента графа) . . . 36
ОПР 3.6.11 (Граф блоков графа G) . . . 36
Теорема 3.6.12 (О графе блоков односвязного графа) . . . 36
ОПР 3.6.13 (Непересекающиеся (a, b)-цепи) . . . 36
ОПР 3.6.14 (Множество вершин, разделяющих a и b) . . . 37
Теорема 3.6.15 (Менгера) . . . 37
Теорема 3.6.16 (Уитни) . . . 37
Теорема 3.6.17 (Менгера (реберный вариант)) . . . 38
Теорема 3.6.18 (Про реберно k-связный граф) . . . 38
Теорема 3.6.19 (Про двусвязный граф) . . . 38
3.7 Планарность графов . . . 38
ОПР 3.7.1 (Плоский граф) . . . 38
ОПР 3.7.2 (Планарный граф) . . . 38
ОПР 3.7.3 (Укладка графа в пространстве $\mathbb{R}^n$) . . . 38
УТВ 3.7.4 (Укладка графа в пространство $\mathbb{R}^3$) . . . 38
УТВ 3.7.5 (Укладка графа на сфере) . . . 39
ОПР 3.7.6 (Грань плоского графа) . . . 39
ОПР 3.7.7 (Граница грани плоского графа) . . . 39
ОПР 3.7.8 (Внешняя и внутренние грани) . . . 39
УТВ 3.7.9 (Свойства планарных графов) . . . 39
Теорема 3.7.10 (Эйлера) . . . 40
Следствие 3.7.11 (1) . . . 40
Следствие 3.7.12 (2) . . . 40
Следствие 3.7.13 (3) . . . 40
Следствие 3.7.14 (4) . . . 40

УТВ 3.7.15 (Графы K_5 и $K_{3,3}$ не являются планарными.) . . . 41
ОПР 3.7.16 (Операция подразбиения ребер) . . . 41
ОПР 3.7.17 (Гомеоморфность графов) . . . 41
Теорема 3.7.19 (Понтрягина-Куратовского) . . . 41
ОПР 3.7.20 (Граф, геометрически двойственный к данному графу) . . . 41
ОПР 3.7.21 (Некоторая терминология) . . . 41
3.7.22 Алгоритм построения плоской укладки графа . . . 42
ОПР 3.7.23 (Плоская укладка) . . . 42
Лемма 3.7.24 () . . . 42
Лемма 3.7.25 () . . . 43
Теорема 3.7.26 (Об укладке планарного графа) . . . 43
Следствие 3.7.27 (1) . . . 44
Следствие 3.7.28 (2) . . . 44
3.8 Раскраска графов . . . 44
3.8.1 Вершинная раскраска . . . 44
ОПР 3.8.1.1 (Раскраска графов) . . . 44
ОПР 3.8.1.2 (Правильная раскраска графа) . . . 44
ОПР 3.8.1.3 (k-раскрашиваемость графа) . . . 44
УТВ 3.8.1.4 (О раскрашиваемости графов) . . . 44
ОПР 3.8.1.5 (k-хроматический граф) . . . 44
ОПР 3.8.1.6 (Минимальная раскраска) . . . 44
Замечание 3.8.1.6.1 (1-хроматический граф) . . . 44
Теорема 3.8.1.7 (Кенига. 2-хроматический граф) . . . 44
3.8.1.8 Алгоритм последовательной раскраски . . . 45
Теорема 3.8.1.9 (О k-раскрашиваемости графа из блоков) . . . 45
Теорема 3.8.1.10 (Оценка хроматического числа графа) . . . 45
Следствие 3.8.1.11 (Оценка хроматического числа графа) . . . 45
Теорема 3.8.1.12 (Брукса) . . . 45
Следствие 3.8.1.13 () . . . 45
3.8.2 Реберная раскраска . . . 46
ОПР 3.8.2.1 (Реберная раскраска) . . . 46
УТВ 3.8.2.2 ($\chi'(G) \geqslant \Delta(G)$) . . . 46
Теорема 3.8.2.3 (Визинга) . . . 46
Теорема 3.8.2.4 (Кенига) . . . 47
3.8.3 Раскраска граней плоских графов . . . 47
ОПР 3.8.3.1 (Карта) . . . 47
ОПР 3.8.3.2 (Раскраска карты) . . . 47
Теорема 3.8.3.3 (Четырех красок) . . . 47
ОПР 3.8.3.4 (Карта, геометрически двойственный к данной) . . . 48
Теорема 3.8.3.5 () . . . 48
ОПР 3.8.3.6 (Свойства графов) . . . 48

Глава 1

Комбинаторика

1.1 Перестановки и сочетания

ОПР 1.1.1 (Перестановок и сочетаний).

Пусть дано множество из n элементов. Выбираем из него k элементов.

1. *Выборка из n элементов по k элементов называется* перестановкой*, если она упорядочена.*
2. *Выборка из n элементов по k элементов называется* сочетанием*, если она неупорядочена.*
3. *Две перестановки, отличающиеся лишь порядком элементов, считаются* различными*.*
4. *Два сочетания, отличающиеся лишь порядком элементов, считаются* одинаковыми*.*

Пример 1.1.2 (Перестановки и сочетания).

▷ Пусть $n = 3$, т.е. множество вида $\{a, b, c\}$; $k = 2$. Рассмотрим различные сочетания и перестановки с такими параметрами:

- Перестановки с повторениями (9 штук): aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc;
- Перестановки без повторений (6 штук): ab, ac, ba, bc, ca, cb;
- Сочетания без повторений (3 штуки): ab, ac, bc;
- Сочетания с повторениями (6 штук): aa, ab, ac, bb, bc, cc.

Лемма 1.1.3 (Количество перестановок с повторениями).

▷ Количество перестановок с повторениями из n по k равно n^k.

▷ **Доказательство**.

- На каждое из k мест n вариантов выбора элемента $\Rightarrow n^k$.

□

Лемма 1.1.4 (Количество перестановок без повторений).

▷ Количество перестановок без повторений из n по k равно $n(n-1)...(n-k+1)$.

▷ **Доказательство**.

- На первом месте n вариантов выбора, на втором $n-1$ и т.д. до k-го места, где $n-k+1$ вариант выбора. Перемножая, получим требуемое.

□

1.1.5 Обозначение

▷ $n(n-1)\dots(n-k+1) = [n]_k = (n)_k = \frac{n!}{(n-k)!}$.

Лемма 1.1.6 (Количество сочетаний без повторения).

▷ Количество сочетаний без повторения из n элементов по k равно C_n^k, где $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

▷ **Доказательство**.

- Рассмотрим все перестановки без повторений. Они распадаются на классы перестановок с одинаковым составом элементов [1]. Найдем количество перестановок в каждом классе, из чего найдем количество классов. В классе перестановки различаются лишь порядком элементов, то есть класс - это все перестановки из данных k элементов по k элементов, значит в нем $k!$ перестановок, следовательно всего классов $\frac{[n]_k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

□

Лемма 1.1.7 (Количество сочетаний с повторениями).

▷ Количество сочетаний с повторениями из n элементов по k равно C_{n+k-1}^{n-1}.

▷ **Доказательство**.

- Для любого сочетания с повторением составим двоичный вектор:

$$\underbrace{0\dots0}_{k_1}1\underbrace{0\dots0}_{k_2}1\dots1\underbrace{0\dots0}_{k_n},$$

где k_i — количество элементов i-го типа в выборке. Например:

$$aa \to (0011)$$
$$ab \to (0101)$$
$$ac \to (0110)$$

По сочетанию можно построить вектор, и наоборот, по вектору можно однозначно восстановить сочетание. В этом двоичном векторе k нулей [2] и $n-1$ единица. Значит таких векторов C_{n+k-1}^{n-1}

□

Лемма 1.1.8 (О двоичных векторах).

▷ Количество двоичных векторов длины n с k единицами равно C_n^k.

▷ **Доказательство**.

- Такой вектор - это неупорядоченный выбор k мест из n мест, то есть это сочетание без повторений из n по k.

□

1.1.9 Свойства C_n^k

▷
1. $C_n^k = C_n^{n-k}$;
2. $(1+x)^n = \sum\limits_{i=0}^{n} C_n^i x^i$;
3. $\sum\limits_{i=1}^{n} C_n^i = 2^n$;
4. $\sum\limits_{i=0}^{n} (-1)^i C_n^i = 0$.

▷ **Доказательство**.

1. $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = C_n^{n-k}$;
2. Бином Ньютона;
3. Следует из пункта 2;
4. Следует из пункта 2.

□

[1] эти классы соответствуют сочетанию без повторения — прим. лек.
[2] $k_1 + k_2 + \dots + k_n = k$

1.2 Метод включений и исключений

1.2.1 Обозначения:

▷ **Пусть:**

- A - конечное множество;
- $A_1,\, A_2,\, \ldots,\, A_n \subset A$;
- $|A| = N_n = S_0$;
- $N_{i_1 \ldots i_k} = \left| \bigcap\limits_{j=0}^{k} A_{i_j} \right|$, где $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$;
- $S_k = \sum\limits_{\substack{(i_1,\ldots,i_k) \\ 1 \leqslant i_1 \leqslant \ldots \leqslant i_k \leqslant n}} N_{i_1 \ldots i_k} = \sum\limits_{(i_1,\ldots,i_k)} \left| \bigcap\limits_{j=1}^{k} A_{i_j} \right|$;
- $\tilde{A} = A \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$.

Наша задача - найти $\tilde{A}$

Пример 1.2.2 (Формула включений и исключений).

▷ При $n = 3$ будем иметь:

$$\left|\tilde{A}\right| = |A| - |A_1| - |A_2| - |A_3| + \left|A_1 \bigcap A_2\right| + \left|A_1 \bigcap A_3\right| + \left|A_2 \bigcap A_3\right| - \left|A_1 \bigcap A_2 \bigcap A_3\right| = S_0 - S_1 + S_2 - S_3 = \sum_{k=0}^{3} (-1)^k S_k.$$

Теорема 1.2.3 (Формула включений и исключений).

▷ <u>Пусть</u>

- A - конечное множество,
- $|A| = N = S_0$
- $A_1,\, A_2,\, \ldots,\, A_n \subset A$
- $\tilde{A} = A \setminus \left| \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i \right|$

▷ <u>Тогда</u>

$\left|\tilde{A}\right| = \tilde{N} = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k S_k$

▷ <u>Альтернативная формулировка.</u>

Если существует n свойств $P_1, \ldots, P_n$ (которым могут удовлетворять элементы множества A); определены множества $A_i = \{a \in A \big| \ a$ удовлетворяет свойству $P_i\}$; $N_{i_1,\ldots,i_k}$ — количество элементов, удовлетворяющих свойствам $P_{i_1}, \ldots, P_{i_k}$.

Тогда $\tilde{A}$ — все элементы A, которые не удовлетворяют ни одному из свойств $P_{i_1}, \ldots, P_{i_k}$.

▷ **<u>Доказательство</u>**.

- Покажем, что любой элемент из множества A учитывается одинаковое количество раз в левой и правой частях формулы.
  - ✓ Пусть $x \in \tilde{A}$. Тогда:
    - ⋆ Он учитывается 1 раз в левой части.
    - ⋆ В правой части: $S_0 = |A| \Rightarrow$1 раз. В S_k при $k \neq 0$, x не учитывается ни разу (по определению $\tilde{A}$.)
  - ✓ Пусть $x \notin \tilde{A}$.
    - ⋆ Тогда в левой части x не учитывается ни разу.

⋆ Пусть x принадлежит ровно r множествам $A_{i_1}, \dots A_{i_r}$.
В правой части: $x \in A_{i_1} \bigcap \dots \bigcap A_{i_r}$. Без ограничения общности можно считать, что $\{i_1, \dots, i_r\} = \{1, \dots, r\}$. Если $j_1, \dots, j_q \subseteq \{1, \dots, r\} \Rightarrow x \in A_{j_1} \bigcap \dots \bigcap A_{j_q}$. Если взять множество индексов, которые не содержаться в $\{1, \dots, r\}$, например, $\{l_1, \dots, l_p\} \nsubseteq \{1, \dots, r\}$, то $x \notin A_{i_1} \bigcap \dots \bigcap A_{i_r}$.
Итак:

- ⋄ При $k > r$ — элемент x не учитывается ни разу в S_k;
- ⋄ При $k \leqslant r$ — элемент x учитывается в S_k столько раз, сколько есть различных k-элементных подмножеств в множестве $\{1, \dots, r\}$, а их C_r^k. Тогда суммарный вклад элемента x в правую часть:

$$C_r^0 - C_r^1 + C_r^2 - \dots + (-1)^k C_r^k + \dots + (-1)^r C_r^r = \sum_{k=0}^{r} (-1)^k C_r^k = 0.$$

□

ОПР 1.2.4 (Беспорядка).
Беспорядок - *такая перестановка* $a_1, a_2, \dots, a_n$ *чисел* $1, 2, \dots, n$, *что* $a_i \neq i$ *для* $\forall i = 1, 2, \dots, n$.

1.2.5 Задача о беспорядках

▷ Найти количество беспорядков.

▷ **Доказательство**.

- ∘ Пусть A - все перестановки чисел $1, 2, \dots, n$. P_i - в перестановке $a_i = i$. $A_i = \{a_1, \dots, a_n \big| \, a_i = i\}$. Надо найти $\tilde{A}$

  Пусть перестановка $a_1, a_2, \dots, a_n$ удовлетворяет k свойствам $P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_k}$. Таких перестановок

$$\left| A_{i_1} \bigcap A_{i_2} \bigcap \dots \bigcap A_{i_k} \right| = (n-k)!.$$

  Действительно: мы зафиксировали k элементов перестановки на определенных местах, а остальные $n-k$ элементов мы переставляем всеми возможными способами. Таким образом, количество различных наборов из k свойств:

$$S_k = \sum_{\substack{(i_1, \dots, i_k) \\ 1 \leqslant i_1 \leqslant \dots \leqslant i_k \leqslant n}} \left| A_{i_1} \bigcap A_{i_2} \bigcap \dots \bigcap A_{i_k} \right| = \sum_{\substack{(i_1, \dots, i_k) \\ 1 \leqslant i_1 \leqslant \dots \leqslant i_k \leqslant n}} (n-k)! = (n-k)! C_n^k.$$

  А значит:

$$\left| \tilde{A} \right| = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k S_k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (n-k)! C_N^k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (n-k)! \frac{n1}{k!(n-k)!} = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \overset{n \to \infty}{\to} \frac{n!}{e}$$

□

1.2.6 Задача о супружеских парах

▷ Надо рассадить n супружеских пар за круглым столом, таким образом, чтобы выполнялись два условия:

1. Мужчины и женщины чередуются за столом.
2. Никакие двое супругов не сидят рядом.

Задача: подсчитать количество способов рассадить людей таким образом.

Глава 2

Булевы функции

2.1 Вводные замечания

ОПР 2.1.1 (Булевого куба).
$\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in \{0,1\}\} = \{0,1\}^n = E^n$ — n-мерный единичный булевый куб.

ОПР 2.1.2 (Булевой функции).

- *Функция* $f\colon E^n \to \{0,1\}$ — *называется* булевой функцией. *Ее можно задать таблицей:*

	x_1	$\ldots$	x_n	$f(x_1,\ldots,x_n)$
0	*0*	$\ldots$	*0*	$f(0,\ldots,0)$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
2^n-1	*1*	$\ldots$	*1*	$f(1,\ldots,1)$

- *Булевых функций от n переменных* 2^{2^n}.
- P_2 - множество всех булевых функций.

2.1.2.1 Пример количества булевых функций

▷ При $n=1$, различных булевых функций 4;

▷ При $n=2$, их 16;

▷ А при $n=10$, их количество составляет $2^{2^{10}} > 2^{1000} = (2^{10})^{100} > 1000^{100} = 10^{300}$.

ОПР 2.1.3 (Существенной зависимости от переменной).
$f(x_1,\ldots,x_n)$ существенно зависит от переменной x_i, *если* $\exists(\alpha_1\ldots\alpha_{i-1},\alpha_{i+1}\ldots\alpha_n)$ *и* $(\beta_1\ldots\beta_{i-1},\beta_{i+1}\ldots\beta_n) \mid f(\alpha_1\ldots\alpha_{i-1},0,\alpha_{i+1}\ldots\alpha_n) \neq f(\beta_1\ldots\beta_{i-1},1,\beta_{i+1}\ldots\beta_n)$.
В этом случае говорят, что x_i - существенная переменная. *Иначе* x_i *- называют* фиктивной переменной.

ОПР 2.1.4 (Равенства булевых функций).
Две булевы функции f, g равны ($f=g$), *если* f *можно получить из* g *добавлением или удалением фиктивных переменных.*
Например:

$$\overline{x}\,\&\,x = 0,\ \overline{\overline{y}\vee y} = 0 \Rightarrow \overline{x}\,\&\,x = \overline{\overline{y}\vee y}$$

ОПР 2.1.5 (Формулы).
Выберем некоторое подмножество функций $\Omega \subseteq P_2$. Формулой над Ω *называется:*

1. $f(x_1,\ldots,x_n), f\in\Omega$;
2. *Если* $f(x_1,\ldots,x_n)$ *- формула и* $A_1,\ldots,A_n$ *- формулы либо символы переменных, то* $f(A_1,\ldots,A_n)$ *тоже формула.*

2.1.5.1 Примеры формул

▷ $n = 1$.

x	0	1	x	$\overline{x}$
0	0	1	0	1
1	0	1	1	0

▷ $n = 2$.

x	y	$x \mathbin{\&} y$	$x \vee y$	$x \to y$	$x \oplus y$	$x \sim y$	$x \vert y$	$x \downarrow y$
0	0	0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	1	0	1	0
1	1	1	1	1	0	1	0	0

$|$ — штрих Шефера
$\downarrow$ — стрелка Пирса

▷ $n = 3$. Рассматриваем только функцию голосования.

x	y	z	m(x, y, z)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

ОПР 2.1.6 (Реализации формулы).
Пусть дана формула $\beta(x_1, \dots, x_n)$ над Ω. Тогда говорят, что $\beta(x_1, \dots, x_n)$ реализует *$f(x_1, \dots, x_n)$, если выполнено одно из следующих условий:*

1. $f(x_1, \dots, x_n) = \beta(x_1, \dots, x_n)$, *где* $f \in \Omega$.
2. $f(x_1, \dots, x_n) = \beta(x_1, \dots, x_n) = f_0(A_1, \dots, A_m)$, *где A_i - либо формула $f_i \in \Omega$, либо переменная x_i.*

β над Ω реализует f, если f — суперпозиция функций из Ω.

ОПР 2.1.7 (Эквивалентности формул).
Две формулы называются эквивалентными*, если они реализуют равные функции.*

2.1.7.1 Пример эквивалентных формул

▷ $x \mathbin{\&} y \equiv \overline{\overline{x} \vee \overline{y}}$;

▷ $xy \vee yz \vee xz \equiv xy \oplus yz \oplus xz$.

ОПР 2.1.8 (Принципа двойственности).
Булева функция $f^*(x_1, \dots, x_n) = \overline{f}(\bar{x_1}, \dots, \bar{x_n})$ называется двойственной функцией *к функции $f(x_1, \dots, x_n)$.*
Если $f(x_1, \dots, x_n)$ задана таблицей, тогда в правом столбце надо все значения инвертировать и перевернуть весь столбец. Получим таблицу для f^*.

2.1.8.1 Примеры двойственных функций

▷ $(x \mathbin{\&} y)^* = x \vee y$,

▷ $(\bar{x})^* = \bar{x}$.

Теорема 2.1.9 (О двойственных функциях).

▷ Пусть

$F(x_1, \dots, x_n) = f\big(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)\big)$.

▷ Тогда

$F^*(x_1, \ldots, x_n) = f^*\big(f_1^*(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_n^*(x_1, \ldots, x_n)\big)$.

▷ **Доказательство**.

∘ Заметим, что $\bar{\bar{f}} = f$. Тогда

$$F^*(x_1, \ldots, x_n) = \bar{F}(\bar{x_1}, \ldots, \bar{x_n}) = \bar{f}\big(f_1(\bar{x_1}, \ldots, \bar{x_n}), \ldots, f_m(\bar{x_1}, \ldots, \bar{x_n})\big) =$$
$$= \bar{f}\big(\bar{\bar{f}}_1(\bar{x_1}, \ldots, \bar{x_n}), \ldots, \bar{\bar{f}}_m(\bar{x_1}, \ldots, \bar{x_n})\big) = \bar{f}\big(\bar{f}_1^*(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \bar{f}_m^*(x_1, \ldots, x_n)\big) =$$
$$= f^*\big(f_1^*(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m^*(x_1, \ldots, x_n)\big).$$

□

Замечание 2.1.9.1 *(Принцип двойственности).*

▷ Пусть

$\beta(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ над Ω реализует функцию $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

▷ Тогда

Функция $\beta^*(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, получаемая из β заменой всех функций из Ω на двойственные, реализует функцию $f^*(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

2.1.9.1 Пример применения принципа двойственности

▷ $\big((x \,\&\, \overline{y}) \oplus (\overline{x} \vee z)\big)^* = (x \vee \overline{y}) \sim (\overline{x} \,\&\, y)$.

2.2 Совершенные нормальные формы

2.2.1 Обозначение

$$x^\sigma = \begin{cases} x, & \sigma = 1; \\ \overline{x}, & \sigma = 0. \end{cases}$$

Теорема 2.2.2 (Свойство булевых функций).

▷ Пусть

$f(x_1, \ldots, x_n) \in P_2$.

▷ Тогда

$\forall k \big| \, 1 \leqslant k \leqslant n$ выполнено:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee_{\sigma_1, \ldots, \sigma_k} x_1^{\sigma_1} \,\&\, x_2^{\sigma_2} \,\&\, \ldots \,\&\, x_k^{\sigma_k} \,\&\, f(\sigma_1, \ldots, \sigma_k, x_{k+1}, \ldots, x_n).$$

▷ **Доказательство**.

∘ Выберем вектор $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. Тогда выражение

$$\bigvee_{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k} \alpha_1^{\sigma_1} \,\&\, \ldots \,\&\, \alpha_k^{\sigma_k} \,\&\, f(\sigma_1, \ldots, \sigma_k, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n)$$

на всех таких наборах $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k)$, что $\exists i \in [1, k]\colon \sigma_i \neq \alpha_i$, принимает значение 0[1], а на наборе $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k) \equiv (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$[2] $- f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n) = f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. Значит:

$$\bigvee_{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k} \alpha_1^{\sigma_1} \,\&\, \ldots \,\&\, \alpha_k^{\sigma_k} \,\&\, f(\sigma_1, \ldots, \sigma_k, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n) = f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n).$$

[1] т.к. $0^0 = \bar{0} = 1$, $0^1 = 0$, $1^0 = \bar{1} = 0$, $1^1 = 1$. — прим. ред.

[2] т.е. $\forall i \big| \, 1 \leqslant i \leqslant k\colon \sigma_i = \alpha_i$. — прим. ред.

□

Замечание 2.2.2.1 *(Первое замечание).*

▷ При $k = 1$ имеем:
$\forall f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in P_2,\ f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 \,\&\, f(1, x_2, \ldots, x_n) \vee \overline{x} \,\&\, f(0, x_2, \ldots, x_n)$.

Замечание 2.2.2.2 *(Совершенная дизъюнктивная нормальная форма (СДНФ)).*

▷ При $k = n$
$\forall f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in P_2 \big|\ f \neq 0$:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigvee_{\substack{\sigma_1, \ldots, \sigma_n \\ f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = 1}} x_1^{\sigma_1} \,\&\, \ldots \,\&\, x_n^{\sigma_n}.$$

Такое представление функции f называют *совершенной дизъюнктивной нормальной формой (СДНФ).*

Теорема 2.2.3 (О представлении функции).

▷ Любую функцию можно представить суперпозицией функций конъюнкции, дизъюнкции и отрицания.

▷ **Доказательство**.

- Если $f \equiv 0$, тогда $f = x \,\&\, \overline{x}$.
- Пусть $f \neq 0$, тогда $\Omega = \{x \,\&\, y, x \vee y, \overline{x}\}$ и используем замечание о СДНФ (2.2.2.2).

□

Теорема 2.2.4 (Совершенная конъюктивная нормальная форма (СКНФ)).

▷ Пусть
Дана функция $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_2 \big|\ f \neq 1$.

▷ Тогда

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \mathop{\&}_{\substack{\sigma_1, \ldots, \sigma_n \\ f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = 0}} (x_1^{\overline{\sigma_1}} \vee \ldots, \vee x_n^{\overline{\sigma_n}}).$$

Такое представление формулы называется *совершенной конъюктивной нормальной формой (СКНФ).*

▷ **Доказательство**.

- $f^*(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee_{\substack{\tau_1, \ldots, \tau_n \\ f^*(\tau_1, \ldots, \tau_n) = 1}} x_1^{\tau_1} \,\&\, \ldots \,\&\, x_n^{\tau_n}$.
- Возьмем двойственную функцию:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f^{**}(x_1, \ldots, x_n) = \mathop{\&}_{\substack{\tau_1, \ldots, \tau_n \\ f^*(\tau_1, \ldots, \tau_n) = 1}} (x_1^{\tau_1} \vee \ldots \vee x_n^{\tau_n}) =_{(\ f^*(\tau_1, \ldots, \tau_n) = 1 \ \Leftrightarrow\ f(\overline{\tau_1}, \ldots, \overline{\tau_n}) = 0\ )}$$
$$= \mathop{\&}_{\substack{\tau_1, \ldots, \tau_n \\ f(\overline{\tau_1}, \ldots, \overline{\tau_n}) = 0}} (x_1^{\tau_1} \vee \ldots \vee x_n^{\tau_n}) =_{(\text{учитывая, что } \overline{\tau_i} = \sigma_i)} \mathop{\&}_{\substack{\tau_1, \ldots, \tau_n \\ f(\overline{\tau_1}, \ldots, \overline{\tau_n}) = 0}} (x_1^{\overline{\sigma_1}} \vee \ldots \vee x_n^{\overline{\sigma_n}}).$$

□

ОПР 2.2.5 (Конъюктивной и дизъюнктивной нормальных формы).

- *Пусть* K_i *- формула над* $\{\&, ^-\}$. K_i — элементарная конъюнкция. *Тогда* $K_1 \vee \ldots \vee K_m$ - дизъюнктивная нормальная форма (ДНФ).
- *Пусть* D_i *- формула над* $\{\vee, ^-\}$. D_i — элементарная дизъюнкция. *Тогда* $D_1 \vee \ldots \vee D_m$ - конъюнктивная нормальная форма (КНФ).

2.3 Полнота и замкнутость

ОПР 2.3.1 (Функционально полной системы).

Система функций $\Omega = \{f_1, \ldots, f_s, \ldots\}$ *называется* функционально полной, *если любая булева функция есть суперпозиция функций над* Ω.

2.3.1.1 Пример функционально полной системы

▷ $\{x \,\&\, y, x \vee y, \bar{x}\}$ — полная система.

Теорема 2.3.2 (О полноте подсистемы).

▷ Пусть $\Omega \subset P_2$ и Ω - полна.

Тогда если для $\theta \subset \Omega$ любая функция из Ω представима формулой над θ, тогда θ тоже полна.

▷ **Доказательство**.

- Пусть $f \in P_2$ и f - представима формулой над Ω. Но каждая функция из Ω представима формулой над θ. Каждую функцию из Ω заменяем формулой над θ. Получили формулу над θ, реализующую $f \Rightarrow \theta$ - полна.

□

Пример 2.3.3 (Полные системы).

1. $\{x \,\&\, y, x \vee y, \bar{x}\}$;
2. $\{x \,\&\, y, \bar{x}\}$, так как $x \vee y = \overline{\bar{x} \,\&\, \bar{y}}$;
3. $\{x \vee y, \bar{x}\}$;
4. $\{x \,\&\, y, x \oplus y, 1\}$, так как $\bar{x} = x \oplus 1$.

ОПР 2.3.4 (Полинома Жегалкина).

Это представление булевой функции f *в виде:*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \bigoplus_{i_1, \ldots, i_s \subseteq \{1, \ldots, n\}} a_{i_1, \ldots, i_s} x_{i_1} \ldots x_{i_s},$$

где $a_{i_1, \ldots, i_s} \in \{0, 1\}$.

2.3.4.1 Пример представления в виде полинома Жегалкина

▷ $x \vee y = ((x \oplus 1)(y \oplus 1)) \oplus 1 = xy \oplus x \oplus y$.

Теорема 2.3.5 (О полиноме Жегалкина).

▷ Любая булева функция представима в виде полинома Жегалкина единственным образом.

▷ **Доказательство**.

- Определив коэффициенты $a_{i_1, \ldots, i_s}$, мы определяем полином. Всего коэффициентов 2^n, следовательно полиномов Жегалкина 2^{2^n}.

□

ОПР 2.3.6 (Замкнутости).

Пусть выбрано множество функций $\Omega \in P_2$. *Тогда*

- Замыканием множества функций Ω *называется множество всех функций, получающихся суперпозицией функций из* Ω. *Обозначается:* $[\Omega]$.
- *Система функций* Ω полна, *если* $[\Omega] = P_2$.
- Ω замкнута, *если* $[\Omega] = \Omega$.

2.3.6.1 Примеры замкнутости и полноты

▷ $\{x \mathbin{\&} y, \bar{x}\}$ - полна, но не замкнута;

▷ $[\{xy, x \vee y\}] \neq P_2 \Rightarrow \{xy, x \vee y\}$ — не полна.

ОПР 2.3.7 (Сравнения булевых векторов).

- *Пусть даны два вектора:* $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ *и* $\tilde{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$. *Будем говорить, что* $\tilde{\alpha}$ предшествует $\tilde{\beta}$ *(обозначается* $\tilde{\alpha} \leqslant \tilde{\beta}$*), если* $\alpha_i \leqslant \beta_i \ \forall i = 1, \ldots, n$.
- *Если* $\tilde{\alpha} \geqslant \tilde{\beta}$ *или* $\tilde{\beta} \leqslant \tilde{\alpha}$, *то говорят, что* $\tilde{\alpha}$ *и* $\tilde{\beta}$ сравнимы, *иначе они называются* несравнимыми.

2.3.7.1 Примеры сравнения булевых векторов

▷ $(0, 0, 1, 1, 0, 0) \leqslant (0, 1, 1, 1, 0, 1)$.

▷ $(0, 1)$ и $(1, 0)$ несравнимы.

ОПР 2.3.8 (Основные классы замкнутых функций).

1. T_0 *- множество булевых функций, сохраняющих 0:* $f(0, \ldots, 0) = 0$

   Пусть $f_0, f_1, \ldots, f_n \in T_0$. *Тогда:*

   $$f(x_1, \ldots, x_n) = f_0(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_n)) \Rightarrow f(0, \ldots, 0) = f_0(0, \ldots, 0).$$

   Значит, T_0 *- замкнуто.*

2. T_1 *- множество булевых функций, сохраняющих единицу:* $f(1, \ldots, 1) = 1$. T_1 *- замкнуто (доказывается аналогично).*

3. S *- самодвойственные функции:* $f \in S \ \Leftrightarrow \ f^* \equiv f$. *Покажем, что* S *- замкнуто.*

   Пусть $f_0, \ldots, f_m \in S$ *и* $F(x_1, \ldots, x_n) = f_0(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)) \in S$. *Тогда:*

   $$F^*(x_1, \ldots, x_n) = f_0^*(f_1^*(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m^*(x_1, \ldots, x_n)) = f_0(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)) = F(x_1, \ldots, x_n).$$

4. L *- линейные функции.*

   Булева функция f *называется* линейной, *если она представляется в виде:*

   $$f = c_0 \oplus c_1 x_1 \oplus \ldots \oplus c_n x_n,$$

   где $c_i \in \{0, 1\}$ $i = 0, \ldots, n$.

   $L = [\{\oplus, 1\}]$, *следовательно* L *- замкнуто.*

5. M *- монотонные функции.*

   Булева функция $f(x_1, \ldots, x_n) \in M \ \Leftrightarrow \ \forall \tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \big| \ \tilde{\alpha} \leqslant \tilde{\beta} \ f(\tilde{\alpha}) \leqslant f(\tilde{\beta})$. *Покажем, что* M *- замкнуто.*

   Пусть $F(x_1, \ldots, x_n) = f_0(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n))$ *и* $f_0, f_1, \ldots, f_n \in M$. *Выберем два вектора* $\tilde{\alpha}$ *и* $\tilde{\beta}$ *таких, что* $\tilde{\alpha} \leqslant \tilde{\beta}$. *Тогда:*

   $$f_1(\tilde{\alpha}) \leqslant f_1(\tilde{\beta}), \ \ldots, \ f_m(\tilde{\alpha}) \leqslant f_m(\tilde{\beta}).$$

   f_0 *- монотонна* $\Rightarrow$ $f_0(f_1(\tilde{\alpha}), \ldots, f_m(\tilde{\alpha})) \leqslant f_0(f_1(\tilde{\beta}), \ldots, f_m(\tilde{\beta}) \Rightarrow F(\tilde{\alpha}) \leqslant F(\tilde{\beta})$ $\Rightarrow$ M *- замкнуто, так как мы брали* $\tilde{\alpha}$ *и* $\tilde{\beta}$ *произвольные.*

Лемма 2.3.9 (О несамодвойственной функции).

▷ Из любой несамодвойственной функции путем перестановки на места переменных x_i функций $x, \bar{x}$ можно получить константу.

▷ **Доказательство**.

- Так как $f(x_1, \ldots, x_n) \notin S$, то $\exists \alpha_1, \ldots, \alpha_n \bigm| f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = f(\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_n)$.
  $\varphi(x) = f(x^{\alpha_1}, \ldots, x^{\alpha_n})$
  $\varphi(0) = f(0^{\alpha_1}, \ldots, 0^{\alpha_n}) = f(\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_n)$, так как $0^{\alpha} = \bar{\alpha}$
  $\varphi(1) = f(0^{\alpha_1}, \ldots, 0^{\alpha_n}) = f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$
  $\varphi(0) = \varphi(1) \Rightarrow \varphi$ - константа.

□

Лемма 2.3.10 (О немонотонной функции).

▷ Из любой немонотонной функции путем подстановки на места переменных функций $\{0, 1, x\}$ можно получить $\bar{x}$.

▷ <u>**Доказательство**</u>.

- Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \notin M$. Тогда: $\exists \tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \tilde{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \bigm| \tilde{\alpha} \leqslant \tilde{\beta}$, но $f(\tilde{\alpha}) \nleqslant f(\tilde{\beta})$. Таким образом $f(\tilde{\alpha}) = 1, f(\tilde{\beta}) = 0$.
  Построим функцию $\varphi(x)$ следующим образом: в функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$ на место x_i подставим
  $\begin{cases} 0, & \text{если } \alpha_i = \beta_i = 0; \\ 1, & \text{если } \alpha_i = \beta_i = 1; \\ x, & \text{если } \alpha_i < \beta_i. \end{cases}$.
  $\left.\begin{array}{l} \varphi(0) = f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 1; \\ \varphi(1) = f(\beta_1, \ldots, \beta_n) = 0. \end{array}\right\} \Rightarrow \varphi(x) = \bar{x}.$

□

Лемма 2.3.11 (О нелинейной функции (1)).

▷ Из любой нелинейной функции путем подстановки на места переменных функций $x, y, 0$ можно получить нелинейную функцию от двух переменных.

▷ <u>**Доказательство**</u>.

- Рассмотрим $f(x_1, \ldots, x_n) \notin L$. $f(x_1, \ldots, x_n) = \bigoplus\limits_{i_1, \ldots, i_s} a_{i_1, \ldots, i_s} x_{i_1} \ldots x_{i_s}$.
  Построим $\varphi(x, y)$ такую, что в f на место x_{i_1} поставим x, на места $x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$ поставим y, а на все остальные места поставим 0. Функция $\varphi(x, y)$ - нелинейна.

□

2.3.11.1 Пример применения леммы 2.3.11

▷ $f(x_1, \ldots, x_5) = 1 \oplus x_1 \oplus x_1 x_3 x_5 \oplus x_3 x_4 x_5 \oplus x_1 x_2 x_3 x_4 x_5$;
$\varphi(x, y) = f(x, 0, y, 0, y) = 1 \oplus x \oplus xy$.

Лемма 2.3.12 (О нелинейной функции (2)).

▷ Из любой нелинейной функции от двух переменных путем подстановки на места переменных $x, y, \bar{x}, \bar{y}$ можно получить xy или $\overline{xy}$.

▷ <u>**Доказательство**</u>.

- $f(x, y) = xy \oplus ax \oplus by \oplus c$, где $a, b, c \in \{0, 1\}$.
  $\varphi(x, y) = f(x \oplus b, y \oplus a) = f(x^b, y^a)$;
  $\varphi(x, y) = (x \oplus b)(y \oplus a) \oplus a(x \oplus b) \oplus b(y \oplus a) \oplus c = xy \oplus ab \oplus c$;
  $\varphi(x, y) = (xy)^{ab \oplus c \oplus 1}$. То есть xy или $\overline{xy}$.

□

Теорема 2.3.13 (Поста).

▷ Класс булевых функций полный $\Leftrightarrow$ он не содержится целиком ни в одном из классов T_0, T_1, S, M, L.

▷ **Доказательство**.

$\Rightarrow$ Пусть U - полна.
$R = \{T_0, T_1, L, S, M\}$.
$U \subseteq R$, $[U] = P_2 \Rightarrow [R] = P_2$.

$\Leftarrow$ Пусть U не лежит целиком ни в одном из классов T_0, T_1, M, L, S.
$\{f_{T_0}, f_{T_1}, f_M, f_L, f_S\} = U'$, где $f_{T_0} \notin T_0,\ f_{T_1} \notin T_1,\ f_M \notin M,\ f_L \notin L,\ f_S \notin S$.
$f_{T_0}(x, \ldots, x) = g_1(x),\ g_1(0) = 1$, то есть $g_1(x) =$ либо $1,$ либо $\bar{x}$;
$f_{T_1}(x, \ldots, x) = g_2(x),\ g_2(1) = 0$, то есть $g_1(x) =$ либо $0,$ либо $\bar{x}$.
Хотим получить $0, 1, \bar{x}$.

1. $g_1(x) = 1, g_2(x) = 0$.
   По лемме 2.3.10: подставляя $g_1(x),\ g_2(x),\ x$ в f_M, получаем $\bar{x}$.
2. $g_1(x) = g_2(x) = \bar{x}$.
   По лемме 2.3.9: подставляя $g_1(x),\ x$ в f_S, получаем константу.

Покажем, что U' полна.
Используя леммы 2.3.11 и 2.3.12 при подстановке $0,\ 1,\ x,\ \bar{x},\ y,\ \bar{y}$ в f_L получим $xy,\ \overline{xy}$.
Так как система $\{xy, \bar{x}\}$ полна, то полна система $U' \Rightarrow U$ - полна.

□

Пример 2.3.14 (Полнота системы).

▷ Определить, полна ли система булевых функций $\{1, x \oplus y, m(x, y, z)\}$.

▷ **Доказательство**.

∘ Составим таблицу принадлежности функций классам T_0, T_1, S, L, M.

	T_0	T_1	S	L	M
1	-	+	-	+	+
$x \oplus y$	+	-	-	+	-
$m(x, y, z)$				-	

$m(x, y, z) = xy \vee yz \vee yz = xy \oplus xz \oplus yz$.
В каждом столбце есть по одному минусу, следовательно система полна.

□

Теорема 2.3.15 (О числе функций существенно зависящих от n переменных).

▷ Число функций $f(x_1, \ldots, x_n)$ существенно зависящих от n переменных равно $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k 2^{2^{n-k}}$.

▷ **Доказательство**.

∘ Всего функций от n переменных 2^{2^n}.
Обозначим за A_i множество булевых функций $f(x_1, \ldots, x_n)$ таких, что x_i - фиктивная переменная.
$A_1, \ldots, A_n \quad \hat{N} = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k S_k$, где $S_k = \sum\limits_{1 \leqslant i_1 \leqslant \ldots \leqslant i_k \leqslant n} N_{i_1, \ldots, i_k}, \quad N_{i_1, \ldots, i_k} = 2^{2^{n-k}} \Rightarrow S_k = C_n^k 2^{2^{n-k}}$.
$\hat{N} = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k 2^{2^{n-k}}$.

□

Глава 3

Теория графов

3.1 Введение

ОПР 3.1.1 (Понятие графа).

Пусть V - непустое множество, $V^{(2)}$ - множество всех 2-х элементных подмножеств множества V. Тогда $G = (V, E)$, где $E \subset V^{(2)}$, называется обыкновенным неориентированным графом.

Элементы множества V называются вершинами *графа* [1] *, а элементы из множества E* - ребрами *графа G.*

Мультиграф - *граф, в котором разрешены кратные ребра (то есть в множестве E пары могут повторяться).*

Псевдограф - *граф, в котором разрешены кратные ребра и петли (то есть в множестве E могут присутствовать элементы (v, v).*

Вершины v и u называются смежными, *если пара $(v, u) \in E$. Если $e = (v, u)$ - ребро, то вершины v и u называют его* концами. *В этой ситуации также говорят, что ребро e* соединяет *вершины v и u. Такое ребро обозначают символом vu.*

Два ребра называются смежными, *если они имеют общую вершину.*

Вершина v и ребро e называют инцидентными, *если v является концом ребра e, и* не инцидентными *в противном случае.*

Множество всех вершин графа G, смежных с некоторой вершинов v, называется окружением вершины v *и обозначается через $N_G(v)$ или просто $N(v)$ (когда ясно о каком графе идет речь).*

$\|N_G(v)\| = deg_G(v)$ - степень вершины v.

Лемма 3.1.2 (О рукопожатиях).

▷ Для любого графа $G = (V, E)$ справедливо $\sum\limits_{v \in V} deg_G\, v = 2|E|$

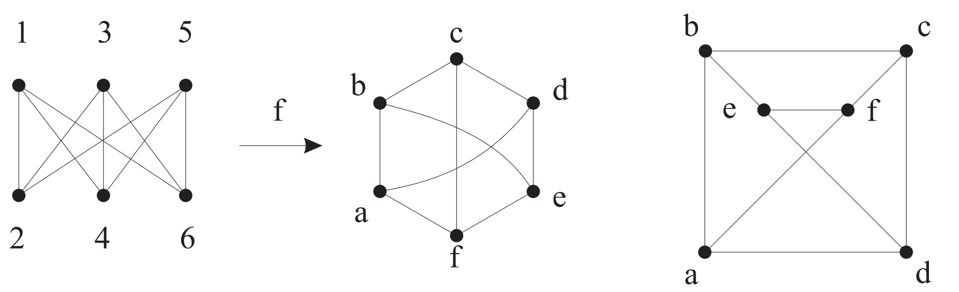
ОПР 3.1.3 (Изоморфизм графов).

Пусть даны два графа $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$. Тогда они изоморфны, *если существует биекция $f : V_1 \to V_2$ такая, что $(v, u) \in E_1 \Leftrightarrow (f(v), f(u)) \in E_2$.*

Обозначается: $G_1 \cong G_2$.

Если $G_1 = G_2$ и $f : G_1 \to G_2$ - биекция, сохраняющая смежность, то f - изоморфизм "на себя"или автоморфизм.

Пример 3.1.4 (Изоморфизм графов).



▷

[1] В нашем курсе рассматриваются только конечные графы, то есть графы с конечным множеством V

$$\left.\begin{array}{l} 1 \to a \\ 2 \to b \\ 3 \to c \\ 4 \to d \\ 5 \to e \\ 6 \to f \end{array}\right\} \text{изоморфизм} \qquad \left.\begin{array}{l} 1 \to 3 \\ 3 \to 5 \\ 5 \to 1 \\ 2 \to 4 \\ 4 \to 6 \\ 6 \to 2 \end{array}\right\} \text{автоморфизм}$$

ОПР 3.1.5 (Маршруты, цепи, циклы).

Чередующаяся последовательность $v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, e_l, v_{l+1}$ *вершин и ребер графа, такая что* $e_i = (v_i, v_{i+1}) \in E(G) - \forall i = 1, \ldots, l$ *называется* маршрутом, соединяющим вершины v_1 и v_{l+1} *(или* (v_1, v_{l+1}) маршрутом*).*

Число l *ребер в маршруте называется его* длиной*.*

Очевидно, что маршрут однозначно задается последовательностью его вершин:

$$v_1, v_2, \ldots, v_{l+1}$$

или последовательностью его ребер:

$$e_1, e_2, \ldots, e_l.$$

Маршрут, у которого все ребра различны, называется цепью *($(v, u) -$ цепь).*

Если все вершины в цепи за исключением начала и конца различны, то такая цепь называется простой *(без самопересечений).*

Цепь, у которой начало и конец совпадают, называется циклом*.*

Простая цепь, у которой начало и конец совпадают, называется простым циклом*.*

Расстояние между вершинами v и u ($d(v, u)$) - *длина кратчайшей* (v, u)*-цепи.*

ОПР 3.1.6 (Подграфы).

Граф $G' = (V', E')$ *называется* подграфом *графа* G*, если* $V' \subset V$ *и* $E' \subset E$*.*

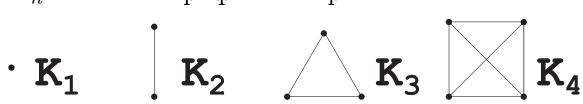
Подграф G' *графа* $G = (V, E)$ *называется* порожденным множеством $V' \subset V$*, если* $\forall v, u \in V'\colon (v, u) \in E \Leftrightarrow (v, u) \in E'$*.*

Граф G - связный*, если* $\forall v, u \in V(G)$ *в* G $\exists (v, u) -$ *цепь.*

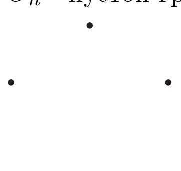
Максимальный по включению вершин и ребер связный подграф графа G *называется* компонентой связности графа G*.*

Пример 3.1.7 (Примеры графов).

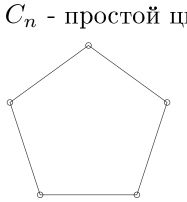
1. K_n - полный граф на n вершинах.



2. O_n - пустой граф (n изолированных вершин).

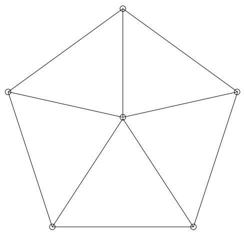


3. C_n - простой цикл.

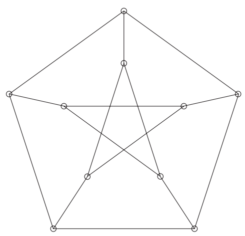


4. P_n - простая цепь.

5. W_n - колеса.



6. $G_{\text{пет}}$ - граф Петтерсона.

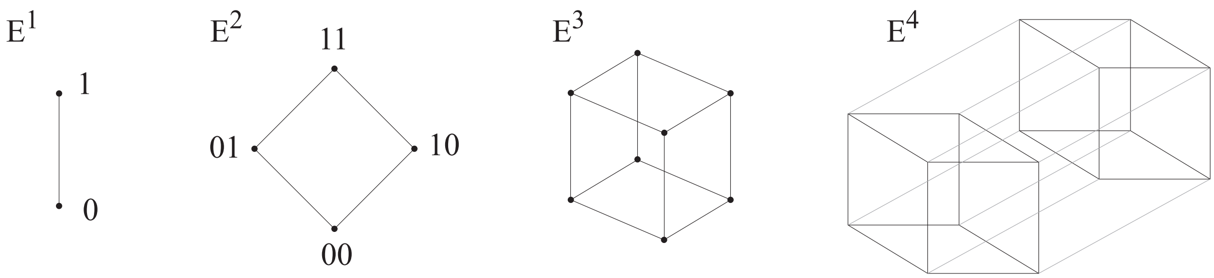


7. E_n - граф n-мерного единичного куба.

   $V(E^n)$ - множество всех двоичных наборов длины n.

   $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\tilde{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$.

   $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ - ребро E^n, если есть отличие ровно в одной координате. $\exists i \big| \ \alpha_i \neq \beta_i$ и $\alpha_j = \beta_j \ \forall j \neq i$.



   Будем говорить, что ребро e имеет номер i, если различие в i-ом разряде.

   K-ый слой куба E^n - все двоичные наборы, содержащие k единиц. В каждом слое C_n^k вершин.

   Грань куба: $E^{n,i_1,\ldots,i_k}_{\sigma_1\ldots\sigma_k}$, где $\{i_1, \ldots, i_k\} \subset \{1, \ldots, n\}$ и $\sigma_i \in \{0, 1\}$.

   Это все двоичные наборы $x_1, \ldots, x_n \big| \ x_{i_j} = \sigma_i \ \forall j = 1, \ldots, k$.

   Размерность грани: $n - k$. Она изоморфна E^{n-k}.

ОПР 3.1.8 (Двудольные графы).

Граф называется двудольным*, если существует такое разбиение множества его вершин на две части* (доли)*, что концы каждого ребра принадлежат разным частям.*

$G = (A, B, E)$*, где* $E \subset \{(v, u) \big| v \in A, u \in B\}$

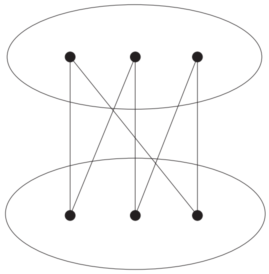
Если при этом любые две его вершины, входящие в разные доли смежны, то граф называется полным двудольным*. Обозначается* $K_{n,m}$*, где* n *и* m *- размеры долей* $(n = \|A\|, m = \|B\|)$.

Теорема 3.1.9 (Критерий двудольности графа Кенига).

▷ G - двудольный $\Leftrightarrow$ G не содержит циклов нечетной длины.

▷ **Доказательство**.

=> Пусть G - двудольный граф. C - один из его циклов длины k. Пройдем все ребра этого цикла в той последовательности, в которой они расположены, начиная с некоторой вершины v. Сделав k шагов, вернемся в v. Так как концы каждого ребра лежат в разных долях, то k - четное число.



<= Заметим, что граф G - двудолен $\Leftrightarrow$все его компоненты связности двудольны. Поэтому можно считать, что граф G - связен.

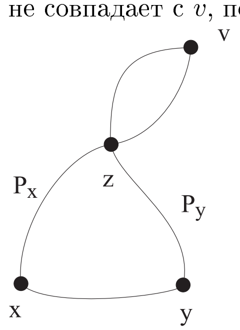
Выберем какую-нибудь вершину $v \in V(G)$. Построим разбиение множества $V(G) = A \cup B$ следующим образом:

$$A = \{u \in V(G) \big| \ d(v,u) - \text{четное число}\}$$

$$B = \{u \in V(G) \big| \ d(v,u) - \text{нечетное число}\}$$

Остается показать, что порожденные подграфы $G(A)$ и $G(B)$ являются пустыми.

Пусть, напротив, существуют две смежные вершины x и y, входящие в один класс. Тогда ни одна из них не совпадает с v, поскольку $v \in A$, а окружение вершины v входит в класс B.



Пусть, далее

P_x - кратчайшая $(v, x) -$ цепь,

P_y - кратчайшая $(v, y) -$ цепь,

z - последняя, считая от v, из общих вершин этих цепей.

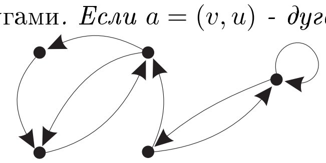
Очевидно, что подцепь (z, v) цепи P_x и подцепь (z, v) цепи P_y имеют одинаковую длину, а подцепь (x, z) цепи P_x и подцепь (y, z) цепи P_y имеют одинаковую четность длины.

Тогда цикл составеленный из цепей P_x, P_y и ребра (x, y) будет иметь нечетную длину - противоречие. Значит граф двудольный.

$\square$

ОПР 3.1.10 (Разновидности графов).

$G = (V, E)$ - ориентированный граф, *если* $E \subset V \times V$. E *- множество ориентированных ребер, которые называют* дугами. *Если* $a = (v, u)$ *- дуга, то вершины* v *и* u *называются ее* началом *и* концом *соответственно.*



Для вершин ориентированного графа вводятся понятия полустепени исхода deg^+v *(число дуг с началом в* v*) и* полустепени входа deg^-v *(число дуг с концом в* v*).*

Граф $\overline{G} = (V, E')$ - дополнительный граф *к графу* G, *если* $\forall v, u \in V (v, u) \in E \Leftrightarrow (v, u) \notin E'$

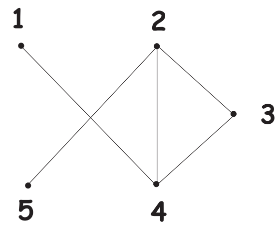
Граф $G = (V, E)$ - помеченный граф*, если каждой его вершине присвоены какие-то метки, например, номера* $1, 2, \ldots, n$.

3.2 Способы задания графов

ОПР 3.2.1 (Матрица смежности).

Пусть $G = (V, E)$ - помеченный граф. Тогда матрицей смежности для графа G *называется матрица $A = A(G)$ размера $n \times n$, составленная по правилу:*

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \textit{i-ая вершина смежна с j-ой,} \\ 0 & \textit{в противном случае.} \end{cases}$$



$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ОПР 3.2.2 (Приведенная матрица смежности).

Если граф $G = (A, B, E)$ - двудольный, причем: $\|A\| = n, A = \{1, 2, \ldots, n\}$, $\|B\| = m, B = \{y_1, \ldots, y_m\}$, то для него существует приведенная матрица смежности. *Элементы этой матрицы определяются следующим образом:*

$$M_{ij} = \begin{cases} 1, & \textit{i-ая вершина смежна с j-ой,} \\ 0, & \textit{в противном случае.} \end{cases}$$

ОПР 3.2.3 (Матрица инцидентности).

Пусть граф $G = (V, E)$ - помеченный, а множества его вершин и ребер определяются следующим образом: $V = \{1, 2, \ldots, n\}$, $E = \{e_1, \ldots, e_m\}$. Тогда для графа определена матрица инцидентности, *задаваемая условием:*

$$I_{ij} = \begin{cases} 1, & \textit{i-ая вершина инцидентна ребру } e_j, \\ 0, & \textit{в противном случае.} \end{cases}$$

Для ориентированного графа:

$$I_{ij} = \begin{cases} 1, & \textit{вершина i - начало дуги } e_j, \\ -1, & \textit{вершина i - конец дуги } e_j, \\ 0, & \textit{в противном случае.} \end{cases}$$

3.3 Обходы

ОПР 3.3.1 (Эйлеров цикл, эйлеров граф).

Цикл в графе G называется Эйлеровым, *если он содержит все ребра.*
Связный граф, в котором есть эйлеров цикл, называется эйлеровым графом.

Теорема 3.3.2 (Эйлера).

▷ Связный граф является эйлеровым тогда и только тогда, когда степени всех его вершин четные.

▷ **Доказательство**.

⇒ Необходимость

Пусть G - эйлеров граф. Эйлеров цикл этого графа, проходя через каждую его вершину, входит в нее по одному ребру, а выходит по другому. Это означает, что каждая вершина инцидентна четному числу ребер эйлерова цикла, а поскольку такой цикл содержит все ребра графа G, то отсюда следует четность степеней всех его вершин.

$\Leftarrow$ Достаточность

Предположим теперь, что степени вершин графа G четны. Начнем цепь P_1 из произвольной вершины v_1 и будем продолжать ее, насколько возможно, выбирая каждый раз новое ребро. Так как степени всех вершин четны, то попав в очередную отличную от v_1 вершину, мы всегда будем иметь в распоряжении еще не пройденное ребро. Поэтому цепь P_1 можно продолжить путем добавления этого ребра. Таким образом, построение цепи P_1 закончиться в вершине v_1, то есть P_1 непременно будет циклом. Если окажется, что P_1 содержит все ребра графа G, то это будет требуемый эйлеров цикл. В противном случае, удалив из G все ребра цикла P_1 рассмотрим граф G_1, полученный в результате такой операции. Поскольку P_1 и G имели вершины только четных степеней, то очевидно, и G_1 будет обладать тем же свойством. Кроме того, в силу связности графа G графы P_1 и G_1 должны иметь хотя бы одну общую вершину v_2. Теперь, начиная с вершины v_2 построим цикл P_2 в графе G_1 подобно тому, как строили цикл P_1. Обозначим через P_1' и P_1'' части цикла P_1 от v_1 до v_2 и от v_2 до v_1 соответственно. Получим новый цикл

$$P_3 = P_1' \cup P_2 \cup P_1''$$

который, начиная с v_1, проходит по ребрам цепи P_1' до v_2, затем обходит все ребра цикла P_2 и, наконец, возвращается в v_1 по ребрам цепи P_1''. Если цикл P_3 не эйлеров, то проделав аналогичные построения, получим еще больший цикл и так далее.

Этот процесс закончится построением эйлерова цикла.

$\square$

3.3.3 Алгоритм Флери

$\triangleright$ Пусть дан связный граф G, у которого все вершины четной степени. Тогда эйлеров цикл в этом графе можно построить, придерживаясь следующих двух правил:

1. Начиная с произвольной вершины u, присваиваем произвольному ребру uv номер 1. Затем вычеркиваем ребро uv и переходим в вершину v.
2. Пусть w - вершина, в которую мы пришли в результате выполнения предыдущего шага, и k - номер, присвоенный некоторому ребру на этом шаге. Выбираем любое ребро, инцидентное вершине w, причем мост[2] выбираем только в том случае, когда нет других возможностей; присваиваем выбранному ребру номер $k + 1$ и вычеркиваем его.

Теорема 3.3.4 (Алгоритм Флери).

$\triangleright$ Алгоритм Флери строит эйлеров цикл

$\triangleright$ **Доказательство**.

- Так как степень каждой вершины четная, то алгоритм может закончить работу только в той вершине, в которой начал. Поэтому он строит некоторый цикл, и надо доказать, что этот цикл включает все ребра графа.

  Предположим, что это не так. Тогда существуют вершины, у которых есть непомеченные инцидентные ребра. Из этих вершин выберем ту, которая инцидентна ребру с наибольшим номером. Тогда это ребро - мост. Получаем противоречие. Значит этот цикл - эйлеров.

$\square$

ОПР 3.3.5 (Гамильтонов цикл, гамильтонов граф).

Простой цикл называется гамильтоновым*, если он содержит все вершины графа.*
Граф называется гамильтоновым*, если он содержит гамильтонов цикл.*

Теорема 3.3.6 (Дирака).

$\triangleright$ Если граф G такой, что $n = \|V(G)\| \geqslant 3$ и $\forall v \in V(G)\ deg\ v \geqslant \frac{n}{2}$, то G - гамильтонов.

$\triangleright$ **Доказательство**.

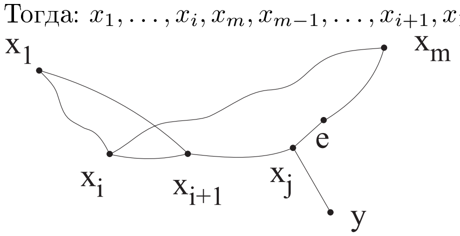
- Заметим, что граф G - связный. Если это не так, тогда существует компонента связности, количество вершин в которой не превышает $\frac{n}{2}$. Тогда в этой компоненте нет вершин степени большей чем $\frac{n}{2} - 1$. Противоречие.

[2] ребро графа G называется мостом, если его удаление из графа приводит к увеличению компонент связности

- Пусть $P = 1,\ 2,\ \ldots,\ m$ - самая длинная цепь в графе G (цепь максимальной длины).
  Поскольку P максимальной длины, то $N(x_1)$[3]$\subset V(P)$, $N(x_2) \subset V(P), \ldots N(x_m) \subset V(P)$.
  Рассмотрим пары:

$$\left.\begin{array}{c}(x_1, x_2)\\(x_2, x_3)\\\cdots\\(x_{m-1}, x_m)\end{array}\right\}(m-1)\text{пара вершин.}$$

Вершин, смежных с x_1, больше $\frac{n}{2}$; вершин, смежных с x_m больше $\frac{n}{2}$. Пар меньше n, значит существует хотя бы одна пара x_i, x_{i+1} такая, что:
$(x_i, x_m) \in E(G)$;
$(x_1, x_{i+1}) \in E(G)$.
Тогда: $x_1, \ldots, x_i, x_m, x_{m-1}, \ldots, x_{i+1}, x_1$ - гамильтонов цикл.



Докажем это. Предположим, что этот цикл не гамильтонов. Следовательно, существуют вершины, такие что они смежны с некоторой вершиной $x_j \in \{x_1, \ldots, x_m\}$. Удаляем ребро цикла, инцидентное x_j и добавляем (y, x_j). Эта цепь длиннее P. Противоречие.

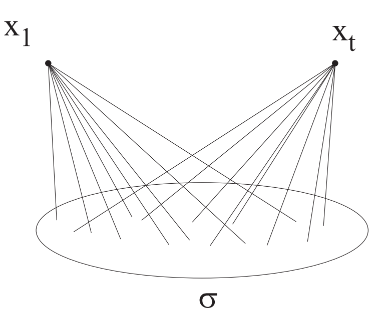
□

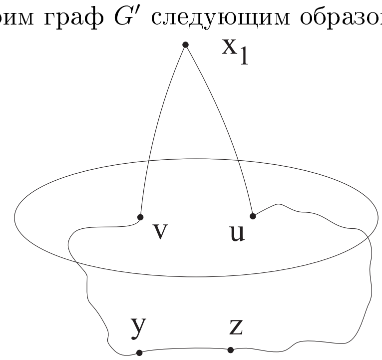
Теорема 3.3.7 (Оре).

- Пусть дан граф G, такой что $n = \|V(G)\| \geqslant 3$. Если $\forall v, u \in V(G)$ $(v, u -$ несмежны$)$ $deg\ v + deg\ u \geqslant n$, то граф G - гамильтонов.

- **Доказательство**.

  - Пусть граф G не гамильтонов. Тогда построим граф G' следующим образом:





Добавляем вершины $x_1, \ldots, x_t$, и каждую добавленную вершину соединяем с каждой вершиной из $V(G)$.
$\exists t \bigm| G'$ - гамильтонов. Выберем минимальное такое t.
Рассмотрим гамильтонов цикл: v, u, (v, x), (x, u), где v и u - несмежны.
Рассмотрим произвольное ребро на этом цикле: (y, z).
Если существуют ребра (v, z) и (u, y), то у нас существует цикл, не содержащий x.
Если $(u, y) \in E(G') \ \Rightarrow \ (v, z) \notin E(G') \ \Rightarrow \ \|V(G') \setminus (\{v\} \cup N_{G'}(v))\| \geqslant deg_{G'} u$.
$\|V(G') \setminus \{v\}\| = \|V(G') \setminus (\{v\} \cup N_{G'}(v))\| + deg_{G'} v \geqslant deg_{G'} u + deg_{G'} v = deg_G u + t + deg_G v + t \geqslant n + 2t$.

$$\left.\begin{array}{c}|V(G')| = n + t\\ n + t - 1 \geqslant n + 2t\end{array}\right| \ \Rightarrow \ t \leqslant -1 \ \Rightarrow \ G - \text{гамильтонов.}$$

□

[3] $N(x)$ - окружение x

3.4 Деревья

3.4.1 Определение

ОПР 3.4.1.1 (Дерево).

Деревом *называется связный граф, не содержащий циклов.*

Любой граф без циклов называется ациклическим *(или* лесом*). Таким образом, компонентами леса являются деревья.*

Теорема 3.4.1.2 (Характеризация деревьев).

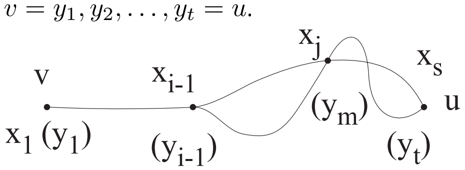
▷ Пусть граф G такой что $\|V(G)\| = n$.

Тогда следующие условия эквивалентны:

1. G - дерево;
2. $\forall v, u \in V(G)$ v и u соединены единственной цепью;
3. G связен и имеет $n-1$ ребро;
4. G имеет $n-1$ ребро и не имеет циклов;
5. G не имеет циклов и добавление любого ребра приводит к графу с одним циклом;
6. $G \neq K_n$ при $n \geqslant 3$, G - связный и добавление любого ребра приводит к графу с одним циклом.

▷ **Доказательство**.

1⇒2 Граф G - связен и, значит, $\forall v, u$ существует (v,u)-цепь. Докажем единственность этой цепи.
Пусть существуют две различные цепи:
$v = x_1, x_2, \ldots, x_s = u$ и
$v = y_1, y_2, \ldots, y_t = u$.



Пусть i - минимальный номер, при котором $y_i \neq x_i$, а
$j = min\{k > i \,\big|\, x_k \in \{y_1, \ldots, y_t\}\}$. При этом $x_k = y_m$.
Тогда $x_{i-1}, x_i, \ldots, x_k = y_m, y_{m-1}, \ldots, y_i, y_{i-1}, = x_{i-1}$ - цикл.
Противоречие. Значит условие 2 выполнено.

2⇒3 G - связен. Покажем индукцией по n. что G имеет $n-1$ ребро.
При $n = 1$ и $n = 2$ - это очевидно.
Пусть $n > 2$. Рассмотрим ребро (v,u). Удалим его из графа. В полученном графе вершины v и u не соединены цепью. Граф G стал несвязен.
Тогда введем обозначения:
V' - множество вершин, соединенных с v цепью;
V'' - множество вершин, соединенных с u цепью.
Справедливо: $V' \cup V'' = V(G)$ и $V' \cap V'' = \emptyset$.
$|V'| - 1 = |E'|$, $|V''| - 1 = |E''|$.
$|E| = |E'| + |E''| + 1 = |V'| - 1 + |V''| - 1 + 1 = |V| - 1$.
Что и требовалось доказать.

3⇒4 Пусть G имеет цикл C и $|C| = k$.
$\forall v \in V(G \setminus C)$ рассмотрим кратчайшую цепь до цикла C.
Рассмотрим первое ребро на этой цепи от v.
$v \neq u \;\Rightarrow\; lv \neq lu$.
$|E(G)| \geqslant k + n - k = n$.

4⇒1 G - не имеет циклов. Значит G - лес.
Пусть он имеет k компонент связности: $G_1, \ldots, G_k$.
$|V(G_i)| - 1 = |E(G_i)| \;\Rightarrow\; |E(G)| = \sum |E(G_i)| = \sum |V(G_i)| - k = |V(G)| - k = n - k$.
А по условию это равно $n-1$. Значит в лесу одна компонента связности: $k = 1$.

2⇒5 Очевидно.

5⇒6 Очевидно.

6⇒1 Очевидно.

□

3.4.2 Кодирование деревьев

Лемма 3.4.2.1 (О висячих вершинах дерева).

▷ В любом дереве существует не менее двух висячих[4] вершин.

▷ **Доказательство**.

- $\|E(G)\| = \|V(G)\| - 1$
  $\sum\limits_{v \in V} deg\ v = 2\|E(G)\| = 2\|V(G)\| - 2$
  То есть, по крайней мере существуют две вершины со смежностью 1.

□

3.4.2.2 Код Прюфера

▷ Пусть $T = (V, E)$ - дерево, $V = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Тогда последовательность $a = (a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$ называется *кодом Прюфера*, если она построена следующим образом:

1. Выбираем из всех висячих вершин вершину с наименьшим номером;
2. Записываем номер соседа этой вершины в последовательность a;
3. Удаляем эту вершину и, если в дереве более 1 вершины, переходим к шагу 1.

Замечание 3.4.2.2.1 *(О коде Прюфера).*

▷ Если $a = (a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$ - код Прюфера, то:

1. $\forall i\ a_i \in \{1, 2, \ldots, n\}$;
2. $a_{n-1} = n$.

Теорема 3.4.2.3 (О коде Прюфера).

▷ Пусть

$a = (a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$ - последовательность, удовлетворяющая свойствам кода Прюфера:

1. $\forall i\ a_i \in \{1, 2, \ldots, n\}$;
2. $a_{n-1} = n$.

▷ Тогда

Существует единственное помеченное дерево $T = (\{1, 2, \ldots, n\}, E)$ такое что a - код Прюфера дерева T.

▷ **Доказательство**.

I Единственность.
Пусть T - помеченное дерево с вершинами $\{1, \ldots, n\}$ и $a = (a_1, \ldots, a_{n-1})$ - код прюфера этого дерева.
Обозначим b_i - номер вершины, которую мы удалили на i-ом шаге построения кода прюфера.
$b_i \notin \{b_1, \ldots, b_{i-1}, a_i\}$ - не была удалена раньше и не является собственным соседом.
$b_i \notin \{a_{i+1}, \ldots, a_{n-1}\}$ - эти вершины не удаляются на i-ом шаге.

[4] Висячей называется вершина дерева со смежностью 1

Обратно: если $k \notin \{b_1, \ldots, b_{i-1}, a_i, \ldots, a_{n-1}\}$, то k - висячая вершина в дереве $T \setminus \{b_1, \ldots, b_{i-1}\}$. Действительно, если k - не висячая в $T \setminus \{b_1, \ldots, b_{i-1}\}$, то $k \neq b_i$ и $\exists q \geqslant i \,\big|\, k = a_q$, но это невозможно. Значит k - висячая вершина в дереве $T \setminus \{b_1, \ldots, b_{i-1}\}$.

По определению кода прюфера b_i - минимальная из всех висячих вершин в $T \setminus \{b_1, \ldots, b_{i-1}\}$, следовательно:

$$b_i = min\{k \notin \{b_1, \ldots, b_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_{n-1}\}\} \qquad (*)$$

То есть, по последовательности $a = (a_1, \ldots, a_{n-1})$ единственным образом восстанавливается вектор $b = (b_1, \ldots, b_{n-1})$.

Так как ребра дерева определяются как $(a_i, b_i) \in E(T)$, то дерево T с кодом прифера $a = (a_1, \ldots, a_n)$ единственно.

II Существование.

Пусть последовательность $a = (a_1, \ldots, a_{n-1})$ удовлетворяет условиям теоремы.

Надо показать, что существует дерево с таким кодом прюфера.

Построим из последовательности a последовательность $b(b_1, \ldots, b_{n-1})$, где b_i вычисляется по формуле (*).

Определим дерево T: $E(T) = \{(a_i, b_i),\ i = 1, \ldots, n\}$. Надо показать, что такое дерево искомое.

Пусть $T_i = T \setminus \{b_1, \ldots, b_{i-1}\}$.

Надо показать:

1. T - дерево (b_i - висячая вершина в T_i);
2. код прюфера дерева $T = a$ (любая другая вершина в T_i имеет номер больший, чем b_i).

1. Так как b_i определяется по формуле (*), то: $b_i \notin \{a_i, \ldots, a_{n-1}\} \Rightarrow a_i \notin \{b_1, \ldots, b_{i-1}\} \Rightarrow a_i \in V(T_i)$.
   Так как по построению, $(a_i, b_i) \in E(T)$, то b_i смежна с некоторой вершиной из $V(T_i)$.
   Надо показать, что только с a_i.
   Предположим, что существует $x \in V(T_i)$ такая, что $x \neq a_i$ и $(x, b_i) \in E(T)$.
   Так как все ребра имеют вид: (a_j, b_j), то существует $j > i$ такое, что $(x, b_i) = (a_j, b_j)$.
   По формуле (*) все b_j для $j = 1, \ldots, n-1$ различны $\Rightarrow$ $b_i \neq b_j$ (противоречие со способом определения вершины b) $\Rightarrow$ $b_i = a_j$ и $x = b_j \Rightarrow x = a_i \Rightarrow b_i$ - смежна с единственной вершиной из множества вершин $V(T_i) \Rightarrow b_i$ - висячая вершина в $V(T_i) \Rightarrow T_i$ - дерево $\Rightarrow T$ - дерево.
2. Пусть k - висячая вершина в T_i.
   Предположим, что $k < b_i$, где $b_i = min\{k \in \{b_1, \ldots, b_{i-1}, a_i, \ldots, a_{n-1}\}\}$.
   Так как мы не выбрали k в качестве b_i, то:
   (a) $k \in \{b_1, \ldots, b_{i-1}\}$;
   (b) $k \in \{a_i, a_{n-1}\}$.
   Случай 1 невозможен, так как $\{b_1, \ldots, b_{i-1}\} \cap V(T_i) = \emptyset \Rightarrow$ Возможен только случай 2 $\Rightarrow \exists j > i \,\big|\, k = a_j$.
   b_i - висячая вершина в T_j и смежна с a_j; $a_j = k$ - висячая вершина в T_i и $i < j \Rightarrow a_j = k$ - висячая вершина в $T_j \Rightarrow$ в T_i ровно две висячие вершины (a_j, b_j) и эти вершины смежны $\Rightarrow j = n-1$ и $a_j = k \Rightarrow a_j = n \Rightarrow n = k$.
   Но $k < b_i \leqslant n$ по выбору $k \Rightarrow$ противоречие $\Rightarrow$ все висячие вершины имеют номера не меньшие чем b_i.

□

Теорема 3.4.2.4 (Кэли).

▷ Количество различных помеченных деревьев на множестве вершин $\{1, 2, \ldots, n\}$ равно n^{n-2}.

▷ **Доказательство**.

- Каждому дереву взаимнооднозначно ставиться код Прюфера: $a = (a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}) = (\underbrace{a_1, \ldots, a_{n-2}}_{\in\{1,2,\ldots,n\}}, n)$

  Всего различных кодов Прюфера $n^{n-2} \Rightarrow$ количество различных помеченных деревьев n^{n-2}.

□

3.4.2.5 Восстановление дерева по коду Прюфера

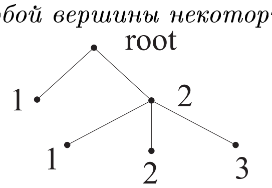
▷ $a = (a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$ - код Прюфера.

Составим из последовательности a последовательность b по правилу: $b_i = min\{k \notin \{b_1, \dots, b_{i-1}, a_i, \dots, a_{n-1}\}\}$.

Тогда дерево $T = (V, E)$, где $V = \{1, 2, \dots, n\}$ и $E = \{(a_i, b_i), i = 1, 2, \dots, n-1\}$ будет нужным нам деревом.

ОПР 3.4.2.6 (Плоское корневое дерево).

Плоское корневое дерево - *это дерево, у которого выделена одна вершина* - корень, *и непосредственные потомки любой вершины некоторым образом занумерованы.*



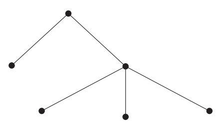
3.4.2.7 Кодирование плоских корневых деревьев

▷ Пусть T - плоское корневое дерево.

Определим отображение $T \to a = (a_1, \dots, a_{2n})$, где $a_i \in \{-1, 1\}$.

Начинаем обход с корня дерева и движемся в крайнем левом направлении. Если перемещаемся в направлении предок - потомок, то записываем 1, если в направлении потомок - предок, то -1.

В коде a $\forall i = 1, \dots, 2n \quad a_1 + \ldots + a_i \geqslant 0$.



(1, -1, 1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, -1)

Теорема 3.4.2.8 (О кодировании плоских корневых деревьев).

▷ Последовательность $a = (a_1, \dots, a_{2n})$ является кодом некоторого плоского корневого дерева $\Leftrightarrow$ $\forall i (i = 1, \dots, 2n)$ $a_1 + \ldots + a_i \geqslant 0$.

Количество деревьев - это количество таких последовательностей.

C_n - количество плоских корневых деревьев на n вершинах = количеству последовательностей длины $2n$, составленных из элементов ± 1, с неотрицательными начальными суммами.

▷ <u>**Доказательство**</u>.

- T - плоское корневое дерево.
  $C(T)$ - код этого дерева.
  $C(T) = (a_1, \dots, a_{2n})$, где n - количество ребер дерева T.
  $\sum\limits_{i=1}^{k} a_i \geqslant 0 \;\; \forall k = 1, \dots, 2n$.
  Обозначим за C_n - количество плоских корневых деревьев.
  $C_n = V_n - U_n$, где:
  V_n - количество всех последовательностей из 1 и -1 длины $2n$;
  U_n - количество всех последовательностей из 1 и -1 длины $2n$, для которых $\exists k \big| \sum\limits_{i=1}^{k} a_i < 0$.
- $V_n = C_{2n}^{n}$, так как у нас количество 1 равно количеству -1 (см. 1.1.8).
- Подсчитаем U_n.
  Имеем: $\exists k \big| \sum\limits_{i=1}^{k} a_i < 0$. Выберем k наименьшее, для которого это верно. Тогда $\sum\limits_{i=1}^{k} a_i = -1$.
  $a \mapsto b = (b_1, \dots, b_{2n})$

$$b_i = \begin{cases} -a_i, & \text{i} \leqslant \text{k}; \\ a_i, & \text{i} > \text{k}. \end{cases}$$

Тогда b - последовательность длины $2n$, составленная из 1 и -1. У этой последовательности $(n+1)$ элемент, равный 1 и $(n-1)$ элемент равный -1 (по построению).

- Теперь рассмотрим два типа последовательностей:
  1. Последовательности, у которых $(n+1)$ элементов 1 и $(n-1)$ элементов -1;
  2. Последовательности, у которых n 1 и n -1.

  Эти два типа последовательностей находятся во взаимно-однозначном соответствии.
  От последовательности 2 к последовательности 1 переход показан.
  Рассмотрим переход от 1 последовательности ко второй.
  Выбираем наименьший начальный отрезок с положительной суммой и заменяем в нем 1 на -1 и -1 на 1.
  Таким образом U_n равно количеству последовательностей, в которых $(n+1)$ 1 и $(n-1)$ -1 $\Rightarrow$ $U_n = C_{2n}^{n-1}$.
- $C_n = V_n - U_n = C_{2n}^n - C_{2n}^{n-1} = \frac{1}{n+1}C_{2n}^n \approx \frac{2^{2n}}{\sqrt{2n}}$

□

3.4.3 Непонятно какая тема

ОПР 3.4.3.1 (Экцентриситет, диаметр, радиус).
Пусть дано граф $G = (V, E)$ и выбрана вершина $u \in V$.
$l(u) = \max\limits_{v \in V} d(u, v)$ - экцетриситет вершины v.
$d(G) = \max\limits_{u \in V} l(u)$ - диаметр *графа G.*
$r(G) = \min\limits_{u \in V} l(u)$ - радиус *графа G.*

ОПР 3.4.3.2 (Центральная вершина, центр графа).
Вершина $v \in V$ называется центральной вершиной*, если $l(v) = r(G)$.*
Подмножество вершин $A \subseteq V$ называется цетром графа G*, если $\forall v \in A$ v - центральная вершина.*

Теорема 3.4.3.3 (Центр дерева).

▷ Центр дерева состоит из одной вершины или двух смежных вершин.
(В лекциях доказательство про граф. ???)

▷ **Доказательство**.

- Пусть T - дерево.
  B - множество всех висячих вершин из T.
  $\forall v \in V(T) \setminus B$ $l_T(v) = l_{T \setminus B}(v) + 1$.
- $T \setminus B$ - опять дерево. Центр дерева T и центр дерева $T \setminus B$ совпадают. После нескольких процедур выбрасывания висячих вершин придем к одному из двух графов:
  1. O_1 - граф, состоящий из одной вершины;
  2. K_2 - граф, состоящий из двух вершин и одного ребра.
- Значит в дереве T центр состоит из одной или двух вершин.

□

3.4.4 Остов графа

ОПР 3.4.4.1 (Остов).
Пусть $G = (V, E)$ и H - подграф G.
Тогда H - оставный подграф*, если $V(H) = V(G)$.*
H - остов, *G, если H - оставный подграф и на любой области связности графа G он индуцирует дерево.*

Теорема 3.4.4.2 (О получении остова).

▷ Количество ребер, которые надо удалить, чтобы получить остов, равно $|E(G)| - |V(G)| + K(G)$, где $K(G)$ - количество компонент графа G.

▷ **Доказательство**.

- Пусть граф разбит на компоненты связности $G = G_1 \cup G_2 \cup \ldots \cup G_l$. Тогда в каждой компоненте надо удалить по $|E(G_i)| - |V(G_i)| + 1$ ребро.

  Значит для всего графа G берем сумму по всем компонентам и получаем $|E(G)| - |V(G)| + K(G)$.

$\square$

Теорема 3.4.4.3 (Свойства остовов).

▷ Пусть $G = (V, E)$ и T, S - его остовы.
Тогда $\forall l_1 \in E(T)\ \exists l_2 \in E(S) \big|\ T \setminus \{l_1\} \cup \{l_2\}$ – остов.

▷ **Доказательство**.

- В графе $T \setminus \{l_1\}$ увеличилось количество компонент связности $\Rightarrow$ существует ребро $l_2 \in S$, соединяющее эти компоненты связности $\Rightarrow$ $T \setminus \{l_1\} \cup \{l_2\}$ - снова остов.

$\square$

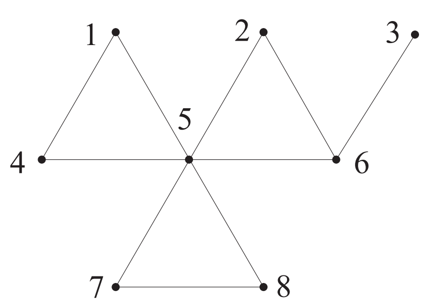
3.5 Независимость и покрытия

3.5.1 Общие понятия

В этот разделе считаем, что $G = (V, E)$

ОПР 3.5.1.1 (Независимое множество).
Подмножество $A \subset V(G) \big|\ \forall a, b \in A\ (a, b) \notin E(G)$ *называется* независимым множеством.
Наибольшее независимое множество называется максимальным, *если оно не является подмножеством некоторого другого независимого множества.*
Наибольшее по мощности независимое множество называется наибольшим независимым множеством.
Число вершин в наибольшем независимом множестве графа G *называется* числом независимости *этого графа и обозначается* $\alpha_0(G)$.

Пример 3.5.1.2 (Независимое множество).

▷ 

$\{4, 3\}$ - независимое множество;

$\{3, 5\}$ - максимальное независимое множество;

$\{1, 2, 3, 7\}$ - наибольшее независимое множество;

$\alpha_0(G) = 4$

ОПР 3.5.1.3 (Паросочетания).
Произвольное подмножество попарно несмежных ребер графа называется паросочетанием*:*
$F \subset E(G) \big|\ \forall e_1, e_2 \in F\ e_1, e_2$ *- несмежны.*
Паросочетание называется максимальным*, если оно не содержится в паросочетании с большим числом ребер, и* наибольшим*, если число ребер в нем наибольшее среди всех паросочетаний графа.*
Число ребер в наибольшем паросочетании графа G *называется* числом паросочетания *и обозначается через* $\alpha_1(G)$.
Пример:
$\{(1, 4), (7, 8), (5, 6)\}$ *- максимальное паросочетание;*
$\{(1, 4), (7, 8), (2, 5), (3, 6)\}$ *- наибольшее паросочетание.*

ОПР 3.5.1.4 (Вершинное покрытие).

Вершинным покрытием *называется подножество множества вершин $A \subset V(G)$ для которого выполнено $\forall e \in E(G)\ \exists a \in A \big|$ e инцидентно a.*

Минимальное вершинное покрытие - *вершинное покрытие, не содержащие никакое другое вершинное покрытие.*

Наименьшее вершинное покрытие - *вершинное покрытие наименьшей мощности.*

Мощность наименьшего вершинного покрытия называется числом вершинного покрытия *и обозначается $\beta_0(G)$.*

Пример:

$\{1, 2, 3, 5, 7\}$ - *минимальное вершинное покрытие;*

$\{4, 5, 6, 7\}$ - *наименьшее вершинное покрытие.*

ОПР 3.5.1.5 (Реберное покрытие).

Реберным покрытием *называется подмножество множества ребер $F \subset E(G)$ для которого выполнено $\forall v \in V(G)\ \exists e \in F \big|$ v инцидентно e.*

Минимальное реберное покрытие - *реберное покрытие, не содержащие никакое другое реберное покрытие.*

Наименьшее реберное покрытие - *реберное покрытие наименьшей мощности.*

Мощность наименьшего реберного покрытия называется числом реберного покрытия *и обозначается $\beta_1(G)$.*

Пример:

$\{(1, 4), (7, 8), (1, 5), (2, 6), (3, 6)\}$ - *минимальное реберное покрытие;*

$\{(1, 4), (2, 5), (3, 6), (7, 8)\}$ - *наименьшее реберное покрытие.*

ОПР 3.5.1.6 (Совершенное паросочетание).

Паросочетание называется совершенным*, если оно является покрытием.*

Теорема 3.5.1.7 (1. $\alpha_0(G) + \beta_0(G) = |V(G)|$).

▷ Пусть $G = (V, E)$. Тогда:

1. $\forall A \subset V(G)$ A – вершинное покрытие $\Leftrightarrow$ $V \setminus A$ – независимое множество
2. $\alpha_0(G) + \beta_0(G) = |V(G)|$

▷ **Доказательство**.

- Упражнение.

□

Теорема 3.5.1.8 (2. $\alpha_1(G) + \beta_1(G) = |V(G)|$).

▷ Пусть дан граф $G = (V, E)$ без изолированных вершин. Тогда $\alpha_1(G) + \beta_1(G) = |V(G)|$.

▷ **Доказательство**.

- Положим $n = |V(G)|$, $\alpha_1 = \alpha_1(G)$, $\beta_1 = \beta_1(G)$ и докажем два неравенства
$$\alpha_1 + \beta_1 \le n,$$
$$\alpha_1 + \beta_1 \ge n,$$
объединение которых и означает гарантируемое теоремой равенство.
- Пусть M - наибольшее паросочетание в графе G. Рассмотрим подмножество V' всех вершин этого графа, не покрываемых ребрами из M. Очевидно, что либо V' - независимое множество вершин, либо $V' = \emptyset$, иначе паросочетание M не было бы наибольшим. Кроме того, $|V'| = n - 2\alpha_1$. При $V' \ne \emptyset$ для каждой вершины $v \in V'$ выберем в графе G ребро, ей инцидентное. Множество выбранных ребер обозначим E'. При $V' = \emptyset$ положим $E' = \emptyset$. Поскольку в графе G нет изолированных вершин и множество V' независимо, то $|E'| = |V'| = n - 2\alpha_1$. Очевидно, что множество $E' \cup M$ является реберным покрытием, следовательно,
$$\beta_1 \le |E' \cup M| = |E'| + |M| = (n - 2\alpha_1) + \alpha_1 = n - \alpha_1.$$
- Пусть P - наименьшее реберное покрытие графа G. Рассмотрим подграф $G' = G(P)$, порожденный ребрами покрытия P. Поскольку P является наименьшим покрытием, то в графе G' всякое ребро инцидентно вершине степени 1, т.е. каждая связная компонента графа G' является звездой. Пусть t - число этих звезд и k_i - число ребер в i-й компоненте. Выбрав в каждой компоненте по одному ребру, получим некоторое паросочетание P' мощности t. Следовательно, $t \le \alpha_1$. Поскольку в графе G' нет изолированных вершин, то
$$n = \sum_{i=1}^{t}(k_i + 1) = \sum_{i=1}^{t} k_i + t = |P| + t = \beta_1 + t \le \beta_1 + \alpha_1.$$

$\square$

ОПР 3.5.1.9 (Чередующаяся относительно паросочетания цепь).
Пусть дан граф $G = (V, E)$ и M паросочетание в G.
Тогда некоторая цепь L называется чередующейся относительно паросочетания цепью*, если ребра этой цепи принадлежат паросочетанию через одно.*

ОПР 3.5.1.10 (Увеличивающаяся относительно паросочетания цепь).
Цепь L называется увеличивающейся относительно паросочетания M цепью*, если L - чередующаяся и первое и последнее ее ребра не принадлежат M.*

Замечание 3.5.1.10.1 *(Про чередующиеся цепи).*

▷ Цепь длины 1 считается чередующийся относительно паросочетания M.

Теорема 3.5.1.11 (Про наибольшее паросочетание).

▷ Паросочетание M в графе G является наибольшим $\Leftrightarrow$ в G нет увеличивающихся относительно M цепей.

▷ **Доказательство**.

$\Rightarrow$ Пусть M - наибольшее паросочетание.
Если в G есть увеличивающаяся относительно M цепь, то можно с помощью нее построить паросочетание $M' \bigm| |M'| = |M| + 1$. А это невозможно.

$\Leftarrow$ Пусть M - паросочетание в графе G, относительно которого нет увеличивающихся цепей.
Предположим, что M не наибольшее паросочетание, то есть $\exists M' \bigm| |M'| > |M|$.
Рассмотрим граф G', порожденный множеством ребер $M \cup M'$ $(M \cap M')$.
В любом паросочетании степень любой вершины 1 $\Rightarrow$ в G' степень любой вершины $\leqslant 2$.
Значит, компоненты связности в G' - либо циклы (четной длины), либо цепи, которые являются чередующимися относительно M и относительно M'. Так как $|M'| > |M|$, то существуют компоненты связности в G', в которых количество ребер из M' больше, чем количество ребер из M $\Rightarrow$ существует увеличивающаяся относительно M цепь, что противоречит с условием $\Rightarrow$ M - наибольшее паросочетание.

$\square$

3.5.2 Паросочетания в двудольных графах

ОПР 3.5.2.1 (Окружение подмножества вершин).
Пусть дан граф $G = (V, E)$. Выберем подмножество вершин $A \subset V(G)$. Тогда окружением подмножества A в графе G *называется множество*

$$N_G(A) = N(A) = \{v \in V(G) \bigm| \exists a \in A \; : \; (a, v) \in E(V)\} \setminus A.$$

Теорема 3.5.2.2 (Существование паросочетания, покрывающего X).

▷ Пусть $G = (X, Y, E)$ - двудольный граф.
Тогда в G существует паросочетание, покрывающее X $\Leftrightarrow$ $\forall A \subset X$ $|N(A)| \geq |A|$.

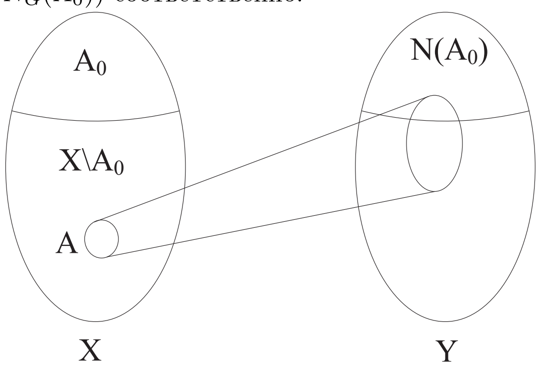
▷ **Доказательство**.

$\Leftarrow$ Пусть $G = (X, Y, E)$ - двудольный граф с $|X| = m > 0$, удовлетворяющий условию теоремы.
При $m = 1$ единственная вершина из X инцидентна хотя бы одному ребру, которое и является необходимым паросочетанием.

○ Пусть $m > 1$ и теорема верна для графов, у которых $|X| < m$. Отдельно рассмотрим два возможных случая.

1. Для каждого подмножества A в X верно строгое неравенство $|A| < |N_G(A)|$. Выберем в G произвольное ребро $e = (x, y) \in E(G)$.
$X' = X \setminus \{x\}$,
$Y' = Y \setminus \{y\}$,
$E' = E \setminus \{$все ребра инцидентные x или $y\}$.
Тогда в графе $G' = (X', Y', E')$ будет выполнено условие теоремы и $|X'| = m - 1$.
Для любого $A' \subset X'$ выполнено $|A'| < |N_G(A')|$. Так как $|Y'| = |Y| - 1$, то $|A'| \leq |N_G(A)')|$. Значит по индукции в G' существует паросочетание, покрывающее X'. Объединив его с ребром e, получим паросочетание в G, покрывающее X.

2. В множестве X существует такое подмножество A_0, что верно равенство $|A_0| = |N_G(A_0)|$.
   Пусть G' и G'' - подграфы графа G, порожденные множествами вершин $A_0 \cup N_G(A_0)$ и $V(G) \setminus (A_0 \cup N_G(A_0))$ соответственно.



   (a) Рассмотрим подграф G'.
   Для любого подмножества $A \subset A_0$ имеем $N_G(A) = N_{G'}(A)$, и, следовательно, $|A| \le |N_{G'}(A)$.
   По индукционному предположению в G' существует паросочетание, покрывающее A_0.

   (b) Рассмотрим подграф G''.
   Для любого подмножества $A \subset X \setminus A_0$ выполняется соотношение

$$|A_0| + |A| = |A_0 \cup A| \le |N_G(A_0 \cup A)| = |N_G(A_0)| + |N_{G''}(A)|$$

   и верно равенство $|A_0| = |N_G(A_0)|$.
   Следовательно, $|A| \le |N_{G''}(A)|$ и по индукционному предположению в графе G'' существует паросочетание, покрывающее $X \setminus A_0$. Объединяя это паросочетание с построенным выше, получим паросочетание в графе G, покрывающее X.

□

Следствие 3.5.2.3 *(Существование паросочетания мощности t).*

▷ Пусть $G = (X, Y, E)$ - двудольный граф, $t \le |X|$.

Тогда в G существует паросочетание мощности $t \Leftrightarrow \forall A \subset X\ |N_G(A)| \ge |A| + t - |X|$.

▷ **Доказательство**.

- Добавим к графу G новые вершины $z_1, \ldots, z_{|X|-t}$ следующим образом:
  $G' = (X, Y', E')$, где
  $Y' = Y \cup \{z_1, \ldots, z_{|X|-t}\}$
  $E' = E \cup \{(z_i, x) \big|\ x \in X, i\ 1, \ldots, |X| - t\}$.
  Тогда в G существует паросочетание мощности $t \Leftrightarrow$ в G' существует паросочетание покрывающее $X \Leftrightarrow \forall A \subseteq X\ |A| \leqslant |N_{G'}(A)| = |N_G(A)| + |X| - t$.

□

УТВ 3.5.2.4 **($\beta_0(G) \ge \alpha_1(G)$).**

▷ $\beta_0(G) \ge \alpha_1(G)$.

▷ **Доказательство**.

- Пусть P - паросочетание в графе G.
  W - вершинное покрытие. В него входит по одной вершине из любого ребра P и возможно еще некоторые вершины графа $\Rightarrow$ |W| $\geqslant$|P| $\Rightarrow$ это верно для наименьшего вершинного покрытия и наибольшего паросочетания $\Rightarrow \beta_0(G) \geqslant \alpha_1(G)$.
  Если G - двудольный граф, тогда $\beta_0(G) = \alpha_1(G)$.

□

3.5.3 Система различных представителей

ОПР 3.5.3.1 (Система различных представителей(СРП)).

Пусть даны множеств $S_1, \dots, S_n$. Тогда СРП будет называться множество $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, если выполнены следующие условия:

1. $\forall x_i, x_j \in X\ x_i \neq x_j$ *при* $i \neq j$;
2. $\forall S_i\ \exists x_i \bigm| x_i \in S_i$.

ОПР 3.5.3.2 (Условие Холла).

Необходимое условие существования СРП.

Для множеств $S_1, \dots, S_n$ существует СРП, если $\forall k = 1, \dots, n\ \forall i_1, \dots, i_k\ |S_{i_1} \cup \ldots \cup S_{i_k}| \geqslant k$.

Теорема 3.5.3.3 (Холла).

▷ Для конечных множеств $S_1, \dots, S_n$ существует СРП $\Leftrightarrow$ выполнено условие Холла.

▷ **Доказательство**.

- ○ Построим двудольный граф $G = (\{S_1, \dots, S_n\}, S, E)$, где:
  $S = \bigcup\limits_{i=1}^{n} S_i$;
  $E = \{(S_i, b_j) \bigm| b_j \in S_i\}$.
  СРП для $S_1, \dots, S_n$ - это паросочетание в графе G.
  Отсюда получаем, что СРП существует $\Leftrightarrow$ существует паросочетание $\Leftrightarrow$
  $\forall k\ \forall i_1, \dots, i_k\ |N(\{S_{i_1}, \dots, S_{i_k}\})| \geqslant k$.
  $N(\{S_{i_1}, \dots, S_{i_k}\}) = \{b_j \bigm| \exists S_i : b_j \in S_i\}$, то есть $|N(\{S_{i_1}, \dots, S_{i_k}\})| \geqslant |S_{i_1} \cup \ldots \cup S_{i_k}|$.
  Поэтому существует СРП $\Leftrightarrow$ выполнено условие Холла $\forall k = 1, \dots, n\ \forall i_1, \dots, i_k\ |S_{i_1} \cup \ldots \cup S_{i_k}| \geqslant k$

□

Пример 3.5.3.4 (СРП: бесконечный случай).

▷ $S_0 = \{1, 2, \ldots\} = \mathbb{N}$
$S_1 = \{1\}$
$S_2 = \{2\}$
$\vdots$
$S_i = \{i\}$
Существует ли СРП для $S_0, S_1, \ldots$?

Теорема 3.5.3.5 (Холла. Бесконечный случай).

▷ Пусть $U = \{S_i \bigm| i \in I\}$, где $\forall i \in I : S_i$ - конечно.
Тогда для U существует СРП $\Leftrightarrow$ выполнено условие Холла, то есть $\forall i_1, \dots, i_k \in I : |S_{i_1} \cup \ldots \cup S_{i_k}| \geqslant k$.
Дается без доказательства.

Теорема 3.5.3.6 (Кенига о (0, 1)-матрицах).

▷ (0, 1)-матрица — матрица, составленная из элементов 0 и 1.
Линия — строка или столбец матрицы.
Пусть A - (0, 1)-матрица.
Тогда минимальное количество линий, содержащих все 1 матрицы A равно максимальному количеству 1, никакие две их которых не стоят в одной линии.

▷ **Доказательство**.

- ○ Пусть m - минимальное количество линий, содержащих все 1.
  M - максимальное количество 1, никакие две из которых не стоят в одной линии.
  Надо показать: $m = M$.

- $M \leqslant m$. Это следует из определения m и M.
- Пусть минимальное количество линий, содержащих все 1 матрицы, состоит из r строк и s столбцов. Без ограничения общности можно считать, что это первые строки и первые столбцы матрицы (иначе переставим).
  $\forall i = 1, \dots, r\ R_i = \{j > s \,\big|\, a_{ij} = 1\}$.
  $R = \{R_1, \dots, R_r\}$.
  Можно утверждать, что для R существует СРП.
  Утверждается, что для $R_1, \dots, R_r$ выполнено условие Холла. Так как если какие-либо k из этих множеств содержат не более $k-1$ элементов, то существующие k строк можно заменить $k-1$ столбцом, чтобы все единицы содержались в новом наборе строк и столбцов. Но m — минимальное, поэтому это невозможно.
  Значит по теореме Холла, $R_1, \dots, R_r$ имеют r различных представителей. То есть таких единиц, что никакие две не лежат на одной и той же линии.
  Аналогично выбираем s единиц в первых s столбцах из которых никакие две не лежат на одной линии и не лежат в первых r строках.
  Таком образом, мы нашли $m = s + r$ единиц, с тем условием, что никакие две из них не лежат на одной линии $\Rightarrow$ $M \geqslant m$.
  Значит, $M = m$.

$\square$

3.5.3.7 Алгоритм поиска СРП

▷ 1. Назначаем представителей:
$S_1 : a_1$
$S_2 : a_2 \in S_2 \setminus \{a_1\}$
$\dots$
$S_n : a_n$.
Тогда $a_1, \dots, a_n$ будет СРП.

2. Возможна ситуация, когда мы не можем выбрать a_i.
$S_1 : a_1$
$S_2 : a_2 \in S_2 \setminus \{a_1\}$
$\dots$
$S_{r-1} : a_{r-1}$
$S_r \subseteq \{a_1, \dots, a_{r-1}\}$ и мы не можем выбрать представителя.
$S_r = \{b_1, \dots, b_t\}$
$T_1 = \{b_1, \dots, b_t\}$
$T_2 = T_1 \cup (S(b_1) \setminus T_1)$, где $S(b)$ — множество, представителем которого является b.
$T_{i+1} = T_i \cup (S(b_i) \setminus T_i)$
$\dots$
Строим таблицу:

T_1 S_r	T_2 $S(b_1)$	T_3 $S(b_2)$	$\dots$	$S(b_{u_s})$	$\dots$	$S(b_{u_{s-1}})$	$\dots$	$S(b_{u_2})$	$\dots$	$S(b_{u_1})$
$b_1, \dots, b_t$	b_1	b_2	$\dots$	b_{u_s}	$\dots$	$b_{u_{s-1}}$	$\dots$	b_{u_1}	$\dots$	b_{u_1}
b_{u_s}	b_1	b_2	$\dots$	$b_{u_{s-1}}$	$\dots$	$b_{u_{s-2}}$	$\dots$	b_{u_1}	$\dots$	$b_u \in S(b_{u_1})$

Возможны два варианта:

(a) В список включены все элементы $S_1, \dots, S_{r-1}$ и нет элемента, который не является представителем некоторого множества $\Rightarrow$ в объединении множеств $S_r, S(b_1), \dots, S(b_k)$ содержится менее чем $k+1$ элемент $\Rightarrow$ не выполнено условие Холла $\Rightarrow$ СРП не существует.

(b) $b_{u_1} \in S(b_{u_1})$
$b_{u_2} \in S(b_{u_2})$
$\dots$
$b_{u_{s-1}} \in S(b_{u_{s-1}})$
$b_{u_s} \in T_1 = S_r$.
Тогда переопределяем представителей:
b_{u_i} — представитель $S(b_{u_{i+1}})$ и b_{u_s} — представитель S_r.

Следствие 3.5.3.8 *(О СРП).*

▷ Пусть для $U = (S_1, \ldots, S_n)$ существует СРП и для $(S_1, \ldots, S_r)$ СРП является $(a_1, \ldots, a_r)$.

Тогда существует СРП для U, содержащая $a_1, \ldots, a_r$, возможно не в качестве представителей множеств $S_1, \ldots, S_n$ соответственно.

Теорема 3.5.3.9 (Об общих представителях).

▷ $S = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n$ и

$\forall k = 1, \ldots, n\ \forall i_1, \ldots, i_k\ \forall$ множеств из $\{A_1, \ldots, A_n\}$ не содержится в объединении менее чем k множеств из системы $\{B_1, \ldots, B_n\}$.

Тогда существует система общих представителей для $\{A_i, i = 1, \ldots, n\}$ и $\{B_i, i = 1, \ldots, n\}$.

То есть $\exists x_1, \ldots, x_n \,\big|\, \{x_1, \ldots, x_n\}$ — СРП для $\{A_i\}$ и СРП для $\{B_i\}$.

Доказательство упражнение.

3.6 Связность графов

Пусть $G = (V, E)$. Тогда:

ОПР 3.6.1 (Число вершинной связанности G).
$æ(G)$ - число вершинной связности графа G*: минимальное количество вершин из $V(G)$, при удалении которых граф G становиться несвязным.*

ОПР 3.6.2 (Число реберной связности графа G).
$\lambda(G)$ - число реберной связности графа G*: минимальное количество ребер из $E(G)$, при удалении которых граф G становиться несвязным.*

ОПР 3.6.3 (Точка сочленения).
Вершина $v \in V(G)$ называется точкой сочленения*, если при ее удалении из графа увеличивается количество компонент связности графа G.*

ОПР 3.6.4 (Мост).
Ребро $e \in E(G)$ называется мостом*, если при его удалении из графа увеличивается количество компонент графа G.*

ОПР 3.6.5 (Блок).
Пусть $\{v_1, \ldots, v_k\}$ - все точки сочленения графа G.
$G' = G \setminus \{v_1, \ldots, v_k\}$.
Тогда блоком графа G *называется компонента связности G', в которую добавления смежные ей точки сочленения вместе с инцидентными ребрами, идущими в вершины этой компоненты.*

УТВ 3.6.6 ($\lambda(G) \leqslant \delta(G)$).

▷ $\lambda(G) \leqslant \delta(G)$, где $\delta(G) = \min\limits_{v \in V(G)} deg\ v$

▷ **Доказательство**.

- Удаление всех ребер, инцидентных вершине минимальной степени, ведет к появлению изолированной вершины. То есть к несвязанному графу и увеличению количества компонент связности. Значит $\lambda(G) \leqslant \delta(G)$.

□

Теорема 3.6.7 (О соотношении чисел связности $æ(G) \leqslant \lambda(G) \leqslant \delta(G)$).

▷ $æ(G) \leqslant \lambda(G) \leqslant \delta(G)$

▷ **Доказательство**.

- G - несвязный $\Rightarrow$ $æ(G) = \lambda(G) = 0$.
- G имеет мост $\Rightarrow$ $æ(G) = \lambda(G) = 1$.

- Пусть G связный и без моста.
  $E_1 \subseteq E(G) \Big| \ |E_1| = \lambda(G)$ и удаление E_1 из G нарушает связность G.
  $E_2 \subseteq E_1 \Big| \ |E_2| = \lambda(G) - 1$.
  Тогда $G \setminus E_2$ - связный граф с мостом (u, v).
  $\forall$ ребра $e \in E_2$ сопоставим одну из его вершин так, чтобы $v(e) \neq u, v$ (то есть вершина не принадлежала мосту) и построим множество $V_2 = \{v(e) \Big| \ e \in E_2\}$.
  Рассмотрим граф $G \setminus V_2$, где $|V_2| = \lambda(G) - 1$.
  Возможны два случая:
  1. $G \setminus V_2$ - несвязный $\Rightarrow$ $\text{æ}(G) \leqslant |V_2| = \lambda(G) - 1 \Rightarrow \text{æ}(G) < \lambda(G)$.
  2. $G \setminus V_2$ - связен $\Rightarrow$ (u, v) - мост в $G \setminus V_2$ $\Rightarrow$ после удаления u или v получим несвязный граф $\Rightarrow$ $\text{æ}(G) \leqslant |V_2| + 1 = \lambda(G)$.

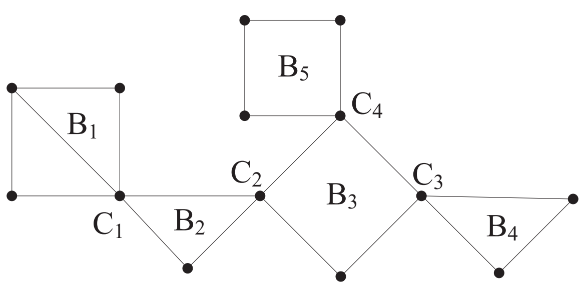
$\square$

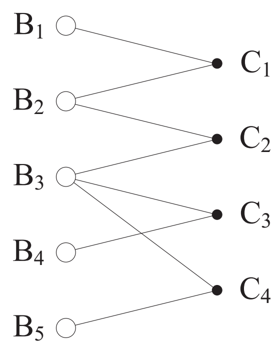
ОПР 3.6.8 (k-связный граф).
Граф G называется k-связным, *если* $\text{æ}(G) \geqslant k$.

ОПР 3.6.9 (Реберно k-связный граф).
Граф G называется реберно k-связным, *если* $\lambda(G) \geqslant k$.

ОПР 3.6.10 (k-связная компонента графа).
k-связной компонентой графа G *называется наибольший по включению k-связный подграф графа G.*
Блок - *2-связная компонента графа.*

ОПР 3.6.11 (Граф блоков графа G).
Пусть дан граф $G = (V, E)$.
$C = \{c_1, \ldots, c_k\}$ - все точки сочленения графа G.
$B = \{B_1, \ldots, B_l\}$ - все блоки графа G.
Тогда двудольный граф $bc(G) = (C, B, E)$, где $E = \{(c_i, B_j) \Big| \ c_i \in C, B_j \in B\}$ называется графом блоков для графа *G.*





Теорема 3.6.12 (О графе блоков односвязного графа).

▷ Граф блоков односвязного графа G является деревом

▷ <u>**Доказательство**</u>.

- $bc(G)$ - связен. Это следует из связности графа G.
- В графе $bc(G)$ нет циклов.
  Пусть в $bc(G)$ есть цикл C. Тогда, рассматривая цепи в каждом из блоков цикла и соединяя соответствующие точки сочлинения, строим цикл C' в G.
  Пусть $u, v \in V(G)$ - произвольные точки. Так как существует цикл C' в G, то удаление из G любой точки сочлинения, лежащей на C', не разрывает всех путей из u в v.
  Так как мы выбирали u, v произвольные, то связность G не нарушается. Возникает противоречие с определением точки сочлинения.

$\square$

ОПР 3.6.13 (Непересекающиеся (a, b)-цепи).
Непересекающимися (a, b)-цепями *называется множество цепей с начальной вершиной в a и конечной вершиной в b, причем в промежуточных вершинах цепи не пересекаются.*

ОПР 3.6.14 (Множество вершин, разделяющих a и b).

Множеством вершин, разделяющих a и b, *назвается такое множество вершин графа G, при удалении которого из графа вершины a и b окажутся в разных компонентах связности.*

Теорема 3.6.15 (Менгера).

▷ Наименьшее количество вершин, разделяющих две несмежные вершины a и b, равно наибольшему числу попарно непересекающихся простых (a, b)-цепей.

▷ **Доказательство**.

- Предположим, что a и b разделяют k вершин. Следовательно, есть не более k непересекающихся (a, b)-цепей.

  Надо показать, что в G нет множества, содержащего менее k вершин, разделяющих a и b.

  Отсюда будет следовать существование k непересекающихся (a, b)-цепей.

  Доказывать будем индукцией по k.

- $k = 1$. Очевидно.

- Пусть верно для k. Покажем, что верно для $k + 1$, то есть в G нет множества, содержащего менее $k + 1$ вершины, разделяющих a и b.

  По индукционному предположению существует k непересекающихся цепей $p_1, \ldots, p_k$.

  Рассмотрим множество вершин, смежных с a и лежащих на цепях $P_1, \ldots, P_k$. Это множество не разделяет вершины a и b $\Rightarrow$ существует (a, b)-цепь P, первая от a вершина которой не совпадает с первыми вершинами цепей $P_1, \ldots, P_k$.

  Рассмотрим вершину v — первая, считая от a, вершина цепи P, принадлежащая выбранным цепям.

  Пусть (a, v) — подцепь из P. Обозначим ее P_{k+1}.

  Выберем такую систему цепей $P_1, \ldots, P_{k+1}$. чтобы расстояние от v до b в графе $G \setminus \{a\}$ было минимальным.

  Возможны два варианта:

  1. $v = b \Rightarrow P_1, \ldots, P_{k+1}$ — искомая система цепей.
  2. $v \neq b$, тогда в графе $G \setminus \{v\}$ вершины a и b не разделяются менее чем k вершинами.
     По индукции существуют цепи $Q_1, \ldots, Q_k$ — непересекающиеся (a, b)-цепи в $G \setminus \{v\}$.
     Выберем их так, чтобы $L = E(G) \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{k+1} E(P_i)$ содержало минимальное количество ребер цепей $Q_1, \ldots, Q_k$, то есть $Q_1, \ldots, Q_k$ состоят в основном из ребер $P_1, \ldots, P_{k+1}$.
     Рассмотрим граф $H = \bigcup\limits_{i=1}^{k} Q_i \cup \{v\}$.
     Пусть P_r — одна из цепей $P_1, \ldots, P_{k+1}$, у которой ребро, инцидентное вершине a, не принадлежит $E(H)$. Ясно, что такая цепь среди $P_1, \ldots, P_{k+1}$ существует, поскольку число из равно $k + 1$, а цепей, составляющих H, всего только k.
     Пусть, далее, x — первая, считая от a, вершина P_r, входящая в $V(H)$.
     (a) $x = b$. Тогда $Q_1, \ldots, Q_k, P_r$ — искомые цепи.
     (b) $x \neq b$.
     Если $x = v$, то обозначим через R кратчайшую (v, b)-цепь в $G \setminus \{a\}$. Пусть z — первая, считая от v, вершина цепи R, лежащая на одной из $Q_1, \ldots, Q_k$. Объединим цепь P_r с (v, z)-подцепью цепи R и обозначим полученную (a, z)-цепь через Q_{k+1}. Цепи $Q_1, \ldots, \mathbb{Q}_{k+1}$ обладают тем свойством, что расстояние в графе $G \setminus \{a\}$ от z до b меньше, чем расстояние от v до b, а это противоречит выбору $P_1, \ldots, P_{k+1}$.
     Последний вариант: x принадлежит некоторой цепи $Q_i (i = 1, \ldots k)$. В этом случае (a, x)-подцепь цепи Q_i имеет ребра из L, иначе бы две цепи в $\{P_1, \ldots, P_k, P_{k+1}\}$ пересекались в вершинах, отличных от a, b, v. Заменив теперь (a, x)-подцепь Q_i на (a, x)-подцепь P_r, получим непересекающиеся (a, b)-цепи в графе $G \setminus \{v\}$, и эти цепи будут использовать меньше ребер из L, чем $Q_1, \ldots, Q_k$. Снова получаем противоречие, которое и завершает доказательство теоремы.

□

Теорема 3.6.16 (Уитни).

▷ Граф G является k-связным $\Leftrightarrow$ любая пара несовпадающих вершин из G соединяется не менее чем k простыми непересекающимися цепями.

▷ **Доказательство**.

- Граф G — k-связный $\Leftrightarrow$ при удалении менее чем k вершин он остается связным $\Leftrightarrow$ любые две несовпадающие вершины a и b из G разделены не менее чем k вершинами $\Leftrightarrow$ любые две несовпадающие вершины a и b из G соединены не менее чем k непересекающимися простыми цепями.

□

Теорема 3.6.17 (Менгера (реберный вариант)).

▷ Наименьшее количество ребер, разделяющих вершины a и b, равно наибольшему количеству простых реберно-непересекающихся (a, b)-цепей.

Теорема 3.6.18 (Про реберно k-связный граф).

▷ Граф G является реберно k-связным $\Leftrightarrow$ любая пара несовпадающих вершин из G соединяется не менее чем k непересекающимися простыми цепями.

Теорема 3.6.19 (Про двусвязный граф).

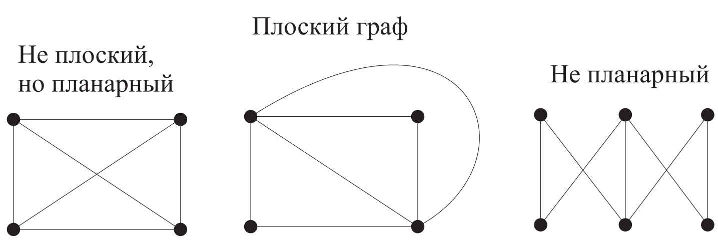
▷ Граф G является двусвязным $\Leftrightarrow$ G может быть получен из некоторого цикла последовательным добавлением простых H-цепей.

H-цепь - это (a, b)-цепь, у которой $a, b \in V(G)$, а остальные вершины не принадлежат множеству $V(G)$.

3.7 Планарность графов

ОПР 3.7.1 (Плоский граф).
Граф $G = (V, E)$ называется плоским *если: V - точки плоскости, а E - отрезки кривых, причем любые два ребра могут пересекаться только в вершинах графа, которым они инцидентны.*

ОПР 3.7.2 (Планарный граф).
Граф называется планарным *если он изоморфен некоторому плоскому графу.*



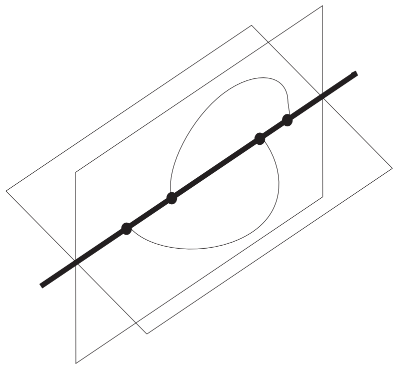
ОПР 3.7.3 (Укладка графа в пространстве $\mathbb{R}^n$).
Говорят, что граф допускает укладку в пространстве $\mathbb{R}^n$*, если он изоморфен некоторому графу, вершины которого являются точками из $\mathbb{R}^n$, а ребра отрезками кривых в $\mathbb{R}^n$, не пересекающихся в точках, отличных от вершин.*

УТВ 3.7.4 (Укладка графа в пространство $\mathbb{R}^3$).

▷ Любой граф G допускает укладку в пространство $\mathbb{R}^3$.

▷ **Доказательство**.

- Все вершины графа G помещаем в различные точки оси OX. Из пучка плоскостей, проходящих через эту ось, выберем $|E(G)|$ различных плоскостей. Далее, каждое ребро $uv \in E(G)$ изображаем в соответствующей плоскости полуокружностью, проходящей через вершины u и v. В результате получаем укладку графа G в $\mathbb{R}_3$, так как все ребра лежат в разных плоскостях и потому не пересекаются во внутренних точках. Вот рисунок для лучшего понимания.



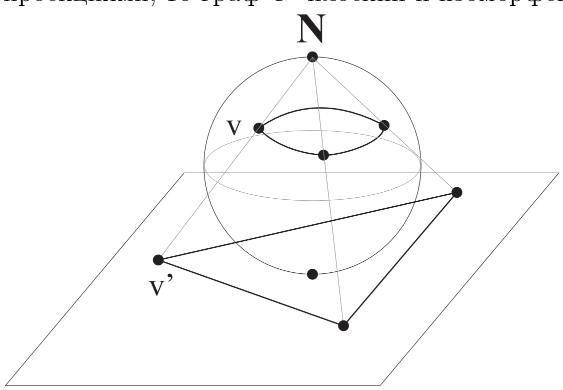
□

УТВ 3.7.5 (Укладка графа на сфере).

▷ Любой граф укладывается на сфере тогда и только тогда, когда он планарный.

▷ **Доказательство**.

- Для доказательства этой теоремы рассмотрим стереографическую проекцию. Пусть граф G уложен на сфере. Проведем плоскость, касательную к сфере, так, чтобы северный полюс N (точка, диаметрально противоположная точке касания) не лежал на ребре и не совпадал с вершиной графа G. Теперь рассмотрим граф G', полученный стереографической проекцией графа G из точки N на плоскость. Поскольку существует биективное соответствие между точками сферы, отличными от N, и их стереографическими проекциями, то граф G' плоский и изоморфен графу G. Следовательно G' - планарный граф.



□

ОПР 3.7.6 (Грань плоского графа).
Связная область плоскости, ограниченная последовательностью ребер графа, называется гранью плоского графа.

ОПР 3.7.7 (Граница грани плоского графа).
Граница грани - *это ребра, принадлежащие грани.*

ОПР 3.7.8 (Внешняя и внутренние грани).
Внешняя грань - *грань бесконечного диаметра.*
Внутренне грани - *все грани графа, за исключением внешней.*

УТВ 3.7.9 (Свойства планарных графов).

▷ 1. Для любого планарного графа G и для любой его вершины $v \in V(G)$ (любого ребра $e \in E(G)$) существует плоская укладка этого графа, при которой вершина v (ребро e) принадлежит внешней грани. Это следует из стереографической проекции при изменении северного полюса на южный.

2. Пусть есть два планарных связных графа G_1 и G_2 и произвольным образом в них выбраны вершины $v_1 \in V(G_1)$ и $v_2 \in V(G_2)$. Тогда граф полученный объединением графов G_1 и G_2 и отождествлении вершин v_1 и v_2 тоже является планарным.

$$G = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2), \text{где} v_1 = v_2.$$

Аналогичное утверждение верно и для ребер.

3. Всякие две вершины, принадлежащие границе некоторой грани плоского графа, можно соединить простой цепью произвольной длины так, что выбранная грань разобьется на две грани и цепь не пересечет ребра графа.
4. Для любого плоского графа каждая точка плоскости, не лежащая на ребре, входит только в одну грань, а каждая точка ребра, не являющаяся вершиной, входит только в одну грань, если это ребро является мостом, и точно в две грани, если оно не мост.

Теорема 3.7.10 (Эйлера).

▷ Пусть дан связный плоский граф G.

n - количество его вершин;

m - количество его ребер;

f - количество его граней.

Тогда справедливо соотношение $n - m + f = 2$.

▷ **Доказательство**.

- Рассмотрим некоторый остов H графа G (он существует, так как граф связный).
  Так как остов является деревом, то у него одна грань. При этом количество вершин равно $|E(G)| = |V(G)| - 1$. Значит для остова формула верна.
  $n - (n-1) + 1 = 2$.
- Далее будем добавлять по одному ребра нашего графа к остову. На каждом шаге количество ребер и количество граней увеличивается на 1. Количество вершин при этом остается неизменным.
  $n - (m+1) + (f+1) = n - m + f = 2$.

□

Следствие 3.7.11 *(1).*

▷ Для произвольного выпуклого многогранника верно $n - m + f = 2$.

Следствие 3.7.12 *(2).*

▷ Пусть G - планарный граф. Тогда любая его плоская укладка содержит $m - n + 2$ грани.

Следствие 3.7.13 *(3).*

▷ Пусть G - связный планарный граф. Тогда $m \leqslant 3n - 6$ при $n \geqslant 3$.

▷ **Доказательство**.

- Не теряя общности, будем считать, что G - связный граф. Прежде всего заметим, что всякое ребро плоского графа либо разделяет две различные грани, либо является мостом. Поскольку G - граф без петель и кратных ребер, то всякая грань ограничена по крайней мере тремя ребрами (исключение составляет лишь случай, когда G - дерево с тремя вершинами, но для такого графа неравенство $3n - 6 \geqslant m$ справедливо). Поэтому число $3f$ является оценкой снизу для удвоенного числа ребер графа G, то есть $3f \leqslant 2m$. Отсюда, учитывая, что по формуле Эйлера $f = m - n + 2$, приходим к требуемому неравенству.

□

Следствие 3.7.14 *(4).*

▷ В любом планарном графе существуют вершина v такая, что $deg\ v \leqslant 5$.

▷ **Доказательство**.

- $m \leqslant 3n - 6$
  $\sum m = \sum\limits_{v \in V(G)} degv$
  Предположим, что $\forall v \in V(G)\ degv \geqslant 6$.
  Тогда $6n \leqslant \sum\limits_{v \in V(G)} degv \leqslant 2(3n-6)$. Противоречие.

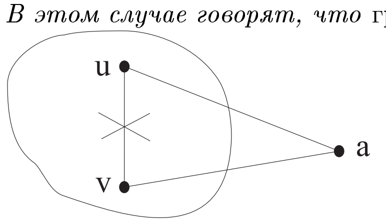
□

УТВ 3.7.15 (Графы K_5 и $K_{3,3}$ не являются планарными.).

- ▷ Графы K_5 и $K_{3,3}$ не являются планарными.
- ▷ **Доказательство**.
  - ○ Для графа K_5: $n = 5$, $m = 19$. Поэтому неравенство $3n - 6 \geqslant m$ превращается в неверное $9 \geqslant 10$, то есть граф K_5 не может быть планарным.
  - ○ Для графа $K_{3,3}$: $n = 6$, $m = 9$. Поэтому, если бы он был планарным, то для любой его плоской укладки выполнялось бы $f = 5$ по 3.7.12. В то же время всякая грань двудольного графа $K_{3,3}$ должна быть ограничена по меньшей мере четырьмя ребрами. Следовательно, $2m \geqslant 4f$, то есть $18 \geqslant 20$. Полученное противоречие доказывает, что граф $K_{3,3}$ не планарен.

□

ОПР 3.7.16 (Операция подразбиения ребер).
Пусть дан граф $G = (V, E)$ и выбрано какое-то его ребро $e \in E(G)$, $e = (u, v)$.
Тогда построим новый граф $G' = (V', E')$, где:
$V' = V \cup \{a\}, a \notin V$;
$E' = (E \setminus \{e\}) \cup \{(u, a), (v, a)\}$.
В этом случае говорят, что граф G' получен из G подразбиенмем ребра e.



ОПР 3.7.17 (Гомеоморфность графов).
Графы G_1 и G_2 гомеоморфны, *если существует граф G_0 такой, что графы G_1 и G_2 получаются из G_0 применением конечного числа операций подразбиения ребер.*

Пример 3.7.18 (Гомеоморфных графов).

- ▷ C_n - цикл длины n.

  $\forall n, m \geqslant 3$ C_m и C_n - гомеоморфны.

Теорема 3.7.19 (Понтрягина-Куратовского).

- ▷ Граф G не является планарным $\Leftrightarrow$ в G есть подграф гомеоморфный K_5 или $K_{3,3}$.

  Без доказательства.

ОПР 3.7.20 (Граф, геометрически двойственный к данному графу).
Пусть дан плоский граф G.
Построим граф $G^* = (V^*, E^*)$ следующим образом:
Внутри каждой грани γ из графа G выберем по одной точке v_γ - это вершины графа G^*.
$V^* = \{v_\gamma, где\ \gamma - граньG\}$.
Далее две вершины v_{γ_1} и v_{γ_2} соединяем ребром, если грани γ_1 и γ_2 графа G имеют хотя бы одно общее ребро. То есть: $E^* = \{(v_{\gamma_1}, v_{\gamma_2}) \big|$ грани γ_1 и γ_2 имеют общую границу ненулевой длины$\}$.
Граф G^* называется геометрически двойственным к графу G.

ОПР 3.7.21 (Некоторая терминология).
Пусть дан граф $G = (V, E)$ и выбран некоторый его подграф H.

1. Сегмент граф G относительно подграфа H.

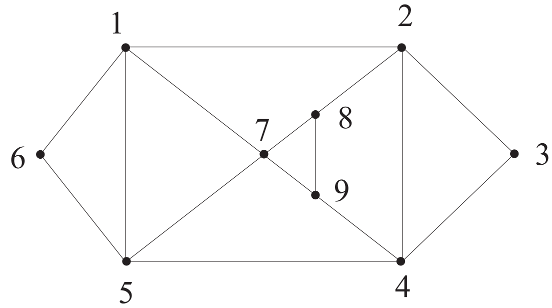
   Рассмотрим компоненты связности графа $G \setminus H$. Добавим к каждой компоненте все вершины из выкинутого подграфа, которые были смежны с некоторыми вершинами из компоненты в исходном графе G и добавим все ребра, инцидентные добавленным вершинам, идущие в вершины компоненты. Полученные связные графы и будут сегментами из G относительно подграфа H.

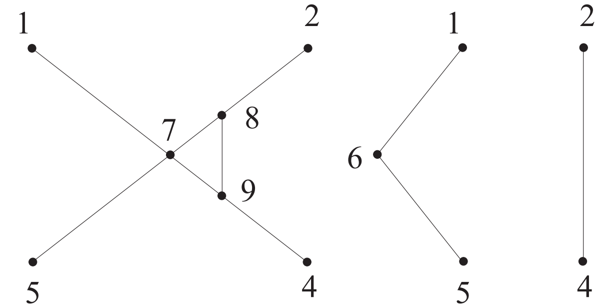
2. *Ребро* (u, v) *является* сегментом относительно H, *если* $u, v \in V(G), (u, v) \notin E(H)$.

   Например:

   Слева показан граф. Выберем подграф $H \mid V(H) = \{1, 2, 3, 4, 5\}, E(H) = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 1)\}$.

   Тогда графы, показанные слева, будут сегментами.





3. Контактные вершины сегмента относительно подграфа H *— это вершины сегмента, принадлежащие* H.

4. *Грань* γ *подграфа* H *называется* допустимой для некоторого сегмента S (относительно подграфа H, *если все его контактные вершины принадлежат этой грани.*

5. α-цепь *это простая цепь в некотором сегмента, концы которой — различные контактные вершины этого сегмента.*

6. *Обозначим через* $r(S)$ *— множество допустимых граней сегмента* S.

   Тогда будем говорить, что сегменты S_1, S_2 конфликтуют, *если* $r(S_1) \cap r(S_2) = \theta \neq \emptyset$ *и существуют* α*-цепи* l_1 *в* S_1 *и* l_2 *в* S_2 *такие, что* l_1 *и* l_2 *не могут быть уложены без пересечения ни в одну из граней* $\gamma \in \theta$.

3.7.22 Алгоритм построения плоской укладки графа

▷ Пусть дан двусвязный граф G.

0. Выберем некоторый простой цикл C в графе G.
   Обозначим $\tilde{G} := C$.
1. Найдем все сегменты G относительно $\tilde{G}$. Если сегментов нет, то плоская укладка построена.
2. Для любого сегмента S надо найти допустимые грани.
   Если существует сегмент $S \mid \Gamma(S) = \emptyset$, где $\Gamma(S)$ — множество допустимых граней, то G — не планарен.
3. Выбор допустимой грани и сегмента.
   (a) $\exists S \mid \Gamma(S) = \{\gamma\}$. Выбираем S и γ.
   (b) $\forall S\ |\Gamma(S)| \geqslant 2$. Выбираем произвольный сегмент S и произвольную грань $\gamma \in \Gamma(S)$.
4. Выбираем произвольную α-цепь l из S и укладываем ее в грань γ.
   $\tilde{G} := \tilde{G} \cup l$.
   Далее переходим на шаг 1.

ОПР 3.7.23 (Плоская укладка).
Пусть дан планарный граф G. *Тогда его подграф* H *называется* частичной укладкой G, *если* H *— плоский и является подграфом некоторой плоской укладки* G.

Лемма 3.7.24.

▷ Пусть S_1, S_2 — конфликтующие сегменты G относительно H и $|\Gamma(S_1)|, |\Gamma(S_2)| \geqslant 2$.

Тогда:

1. $\Gamma(S_1) = \Gamma(S_2)$;
2. $|\Gamma(S_1)| = |\Gamma(S_2)| = 2$.

▷ **Доказательство**.

1. От противного.

   Пусть $\exists$ грани $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \,\big|\, \gamma_1 \in r(S_1), \gamma_2 \in r(S_2), \gamma_3 \in r(S_1) \cap r(S_2)$ и любая α-цепь может быть уложена в γ_i $(i = 1, 2)$. Тогда l_1, l_2 не пересекаются, то есть они укладываются без пересечения вне грани γ_3.

   Это значит, что они могут быть уложены без пересечений и внутри γ_3.

   Но l_1, l_2 — произвольные, а S_1, S_2 — конфликтующие. Противоречие.

2. Если существуют $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in \Gamma(S_1) \cap \Gamma(S_2)$, то любые α-цепи l_1, l_2 укладываются в γ_1, γ_2 соответственно $\Rightarrow$ они укладываются и внутри γ_3. Противоречие.

□

Лемма 3.7.25.

▷ Пусть H — подграф G. Построим граф $S(H) = (\{S\text{−сегмент относительно H}\}, \{(S_1, S_2) \,\big|\, S_1, S_2\text{−конфликтующие}\})$.

Если после некоторого шага алгоритма получена частичная укладка $\tilde{G}$ планарного графа G и для любого сегмента S относительно $\tilde{G}$ $|\Gamma(S)| \geqslant 2 \;\Rightarrow\; S(\tilde{G})$ — двудольный.

▷ **Доказательство**.

- Доказывать будем от противного.

  Пусть $S(\tilde{G})$ — не двудольный. Тогда в $S(\tilde{G})$ есть цикл нечетной длины r: $S_1, S_2, \ldots, S_{r-1}, S_r, S_1$. Это означает, что S_i и S_{i+1} конфликтуют $\forall i = 1, \ldots, r$.

  По лемме 3.7.24 $|\Gamma(S_i)| = 2$ $\forall i = 1, \ldots, r$ и $\Gamma(S_i) = \Gamma(S_j)$ $\forall i, j$.

  $\tilde{G}$ — частичная укладка G $\Rightarrow$ в соответствующем плоском графе сегменты $S_1, \ldots, S_r$ располагаются в гранях γ_1, γ_2 графа $\tilde{G}$ и чередуются (так как они конфликтуют).

  Так как $r = 2k + 1$, то если S_1 укладывается в γ_1, то и S_2 укладывается в γ_1. Но S_1, S_2 — конфликтуют $\Rightarrow$ не укладываются вместе в γ_1 $\Rightarrow$ предположение неверно и $\tilde{(G)}$ — двудольный.

□

Теорема 3.7.26 (Об укладке планарного графа).

▷ Пусть G - планарный граф.

Тогда, при применении алгоритма нахождения плоской укладки графа G, после каждого шага алгоритма получается частичная укладка графа G.

▷ **Доказательство**.

- Доказывать будем индукцией по количеству шагов алгоритма.

  Так как граф двусвязен, то в нем есть цикл, который, очевидно, является частичной укладкой.

  Шаг индукции: пусть имеем некоторую частичую укладку $\tilde{G}$. Надо показать, что после выполнения шага алгоритма, опять получится частичная укладка.

  Возможны три варианта.

  1. Существует сегмент S относительно $\tilde{G} \,\big|\, \Gamma(S) = \emptyset$.

     Такое невозможно, так как по условию G — планарен и по предположению индукции $\tilde{G}$ — частичная укладка (то есть S уложен в некоторую грань $\tilde{G}$).

  2. Существует сегмент S относительно $\tilde{G} \,\big|\, \Gamma(S) = \{\gamma\}$.

     Очевидно, что в плоском графе, изоморфном G, подграфом которого является плоский граф $\tilde{G}$, сегмент S находится в грани γ $\Rightarrow$ любая его α-цепь тоже находится в грани γ $\Rightarrow$ после ее укладки в γ опять получиться частичная укладка.

  3. $\forall S$ относительно $\tilde{G} |\Gamma(S)| \geqslant 2$.

     Рассмотрим граф $S(\tilde{G})$ и его связную компоненту, содержащую сегмент S (S — сегмент, выбранный в ходе алгоритма).

     (a) S — изолированная вершина в $S(\tilde{G})$. Тогда сегмент S можно уложить в любую допустимую грань.

     (b) S — не изолированная в $S(\tilde{G})$. Тогда компонента тоже двудольный граф и $\forall S'$ из этой компоненты $\Gamma(S') = \{\gamma_1, \gamma_2\}$.

Пусть в укладке, из которой получается частичная укладка S находится в γ_1. Тогда все сегменты первой доли компоненты тоже находятся в γ_1, а второй доли в γ_2. Но γ_1, γ_2 можно поменять местами, то есть если сегмент был уложен в γ_1, то его можно поместить в γ_2 и наоборот.
Получим опять укладку графа $G \Rightarrow$ исходный сегмент можно поместить как в γ_1, так и в γ_2, а значит любую α-цепь из S можно поместить как в γ_1, так и в $\gamma_2 \Rightarrow$ после ее укладки получим новую частичную укладку графа G.

□

Следствие 3.7.27 *(1).*

- ▷ Если G - планарный граф, то алгоритм строит плоскую укладку графа G.

Следствие 3.7.28 *(2).*

- ▷ Если в процессе применения алгоритма к графу G на некотором шаге есть сегмент S, такой что $\Gamma(S) = \emptyset$, то граф G не планарен.

3.8 Раскраска графов

3.8.1 Вершинная раскраска

ОПР 3.8.1.1 (Раскраска графов).
Пусть $G = (V, E)$. *Тогда отображение* $\varphi : V \to \{1, \ldots, k\}$ *называется* вешинной k-раскраской графа G.

ОПР 3.8.1.2 (Правильная раскраска графа).
Раскраска графа G *называется* правильной*, если никакие две смежные вершины не покрашены в один цвет. То есть:* $(v, u) \in E \Rightarrow \varphi(u) \neq \varphi(v)$.
При этом множество $V_i = \{v \in V \mid \varphi(v) = i\}$ *называются* цветовым классом *(множество вершин, покрашенных в* i*-ый цвет). Цветовой класс является независимым множеством.*

ОПР 3.8.1.3 (k-раскрашиваемость графа).
Граф G *называется* k-раскрашиваемым*, если существует его правильная* k*-раскраска.*

УТВ 3.8.1.4 (О раскрашиваемости графов).

- ▷ Если граф G является k-раскрашиваемым, то он также является $(k+1)$-раскрашиваемым.

ОПР 3.8.1.5 (k-хроматический граф).
Граф G *называется* k-хроматическим*, если он является* k*-раскрашиваемым, но не* $(k-1)$*-раскрашиваемый.*
Тогда $\chi(G) = k$ - хроматическое число G.
Раскраска графа G *в* $\chi(G)$ *цветов - это разбиение* $V(G)$ *на минимальное число независимых множеств.*

ОПР 3.8.1.6 (Минимальная раскраска).
Минимальная раскраска - *правильная раскраска в минимальное количество цветов, то есть в* $\chi(G)$ *цветов.*

Замечание 3.8.1.6.1 *(1-хроматический граф).*

- ▷ 1-хроматический граф $\Rightarrow \chi(G) = 1 \Rightarrow$ это пустой граф $G = (V, \emptyset)$.

Теорема 3.8.1.7 (Кенига. 2-хроматический граф).

- ▷ $\chi(G) = 2 \Leftrightarrow G$ - двудольный и не пустой.
- ▷ **Доказательство**.

  $\Leftarrow$ Так как граф G - двудольный, то каждую долю покрасим в свой цвет. Так как он не пустой, то существуют две смежные вершины, и мы не можем покрасить их в один цвет.

  $\Rightarrow$ $\chi(G) = 2$. Тогда цветовые классы являются долями двудольного графа.

□

3.8.1.8 Алгоритм последовательной раскраски

▷ 1. Произвольную вершину красим в 1-й цвет.
2. Произвольную, еще не окрашенную вершину, красим в минимальный цвет, который не встречается среди вершин, смежных с выбранной и уже окрашенных.

Для полных k-дольных графов этот алгоритм дает минимальную раскраску.

$G = (V_1, \ldots, V_k, E)$ Пусть есть какое-то ребро $(u, v) \in E$. Тогда по построению вершины u и v попадут в разные цветовые классы: $u \in V_i$ и $v \in V_j \Rightarrow i \neq j$.

Теорема 3.8.1.9 (О k-раскрашиваемости графа из блоков).

▷ Пусть граф G состоит из блоков $G_1, \ldots, G_N$. Тогда граф G будет k-раскрашиваемым $\Leftrightarrow$любой из блоков k-раскрашиваемый: $\forall i = 1, \ldots N$ $G_i - k-$раскрашиваемый.

▷ **Доказательство**.

$\Rightarrow$ Очевидно.

$\Leftarrow$ Рассмотрим некоторую правильную k-раскраску φ_i графа G_i.
Граф блоков G является деревом. Возьмем какой-нибудь блок и его правильную k-раскраску. У него одна точка сочленения. В "соседнем"блоке так перекрасим цвета, чтобы в точке сочленения цвета совпали. Так как в графе блоков нет циклов, то аналогично состыкуем раскраски во всех блоках.

□

Теорема 3.8.1.10 (Оценка хроматического числа графа).

▷ Для любого графа G: $\chi(G) \leqslant 1 + \max\delta(H)$, где максимум берется по всем порожденным подграфам H из G и $\delta(H)$ - минимальная степень вершины графа H.

▷ **Доказательство**.

- Для доказательства теоремы используем индукцию по количеству вершин графа.
  Базис очевиден.
- Шаг индукции:
  Пусть G - k-хроматический граф. Так как $k \geqslant 2$, то выбираем минимальный порожденный подграф H.
  $\chi(H) = \chi(G) = k$, то есть $v \in V(H)$ $\chi(H \setminus \{v\}) \leqslant k - 1$.
  В частности, это верно, если $v \,\big|\, deg_H v = \delta(H)$.
  Предположим, что $deg_H v < k - 1$, тогда красим $H \setminus \{v\}$ в $k - 1$ цвет.
  Среди соседей вершины v встречается менее чем $k - 1$ цветов $\Rightarrow$ красим v в этот цвет и получаем $(k - 1)$ раскраску H. но это невозможно $\Rightarrow$ $deg_H v \geqslant k - 1$.
  $k - 1 \leqslant deg_H v = \delta(H) \leqslant \max\delta(G)$, где максимум берется по всем порожденным подграфам H из G
  Так как $\chi(G) = k$, то $\chi(G) - 1 \leqslant \max\delta(H)$.

□

Следствие 3.8.1.11 *(Оценка хроматического числа графа).*

▷ Для любого графа G: $\chi(G) \leqslant 1 + \Delta(G)$.

▷ **Доказательство**.

- Это следует из равенств:
  $\delta(G) = \min\limits_{v \in V(G)} deg\ v$ и $\Delta(G) = \max\limits_{v \in V(G)} deg\ v \Rightarrow \max\delta(H) \leqslant \Delta(H)$

□

Теорема 3.8.1.12 (Брукса).

▷ Если G — связный граф, G не является полным и $\Delta(G) \geqslant 3$, то $\chi(G) \leqslant \Delta(G)$.

Без доказательства.

Следствие 3.8.1.13.

▷ Если G — связный граф, $G \neq K_n$ (G не является полным) и φ его минимальная раскраска, то $\exists x, y \in V(G) \,\big|\, \varphi(x) = \varphi(y)$ и x, y находятся на расстоянии 2.

3.8.2 Реберная раскраска

ОПР 3.8.2.1 (Реберная раскраска).

Пусть дан граф $G = (V, E)$.

Отображение $\psi : E \to \{1, \ldots, k\}$ называется реберной k-раскраской графа G.

ψ является правильной реберной k-раскраской, если для любых смежных ребер e_1, e_2 выполняется $\psi(e_1) \neq \psi(e_2)$.

ψ — минимальная реберная раскраска графа G, если она использует минимальное количество цветов.

Граф G называется реберно k-хроматическим, если его минимальная правильная реберная раскраска использует k цветов.

Свойства:

1. *G — k-хроматический $\Rightarrow$ G — k-раскрашиваемый.*
2. *G — k-раскрашиваемый $\Rightarrow$ G — $(k+1)$-раскрашиваемый.*

$\chi'(G)$ — реберно-хроматическое число — минимальное количество цветов, в которые можно правильно раскрасить граф G.

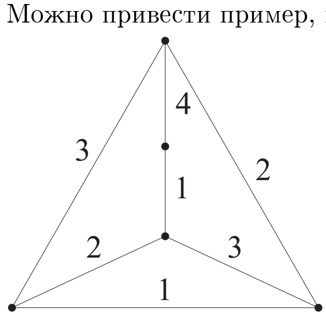
УТВ 3.8.2.2 ($\chi'(G) \geqslant \Delta(G)$).

▷ $\chi'(G) \geqslant \Delta(G)$.

▷ **Доказательство**.

- Выберем вершину с максимальной степенью. Все смежные ребра должны иметь разные цвета, поэтому $\chi'(G) \geqslant \Delta(G)$.

  Можно привести пример, когда $\chi'(G) > \Delta(G)$.



□

Теорема 3.8.2.3 (Визинга).

▷ $\forall G\ \Delta(G) \leqslant \chi'(G) \leqslant \Delta(G) + 1$.

Эта теорема дает поразительно точные оценки хроматического индекса графа.

▷ **Доказательство**.

- $\Delta(G) \leqslant \chi'(G)$. Уже доказано.
- $\chi'(G) \leqslant \Delta(G)$. Доказывать будем индукцией по количеству ребер графа.

  При $G = K_2$ это очевидно.

  Предположим, что для всех графов, у которых количество ребер не превышает некоторое число утверждение верно. Рассмотрим граф G с минимальным количеством ребер, для которого утверждение неверно, то есть $\chi'(G) > \Delta(G) + 1$.

  $G = (V, E)$.

  $\forall e_1 \in E(G)$ в графе $H = G \setminus \{e_1\}$ утверждение выполнено, то есть $\chi'(H) \leqslant \Delta(G) + 1 \leqslant \Delta(G) + 1$.

  Рассмотрим некоторую реберную раскраску $\psi : E(H) \to \{1, \ldots, \Delta(G), \Delta(G) + 1\}$.

  Будем говорить, что цвет k отсутствует в вершине v, если $\forall$ ребра e, инцидентного вершине v, $\psi(e) \neq k$.

  Пусть $e = (x, y)$ и пусть в вершине x отсутствует цвет s, а в вершине y отсутствует цвет t (Это возможно, поскольку красим в $(\Delta(G) + 1)$ цвет, а $\Delta(H) \leqslant \Delta(G)$. Значит $\forall v \in V(H)$ существует цвет, отсутствующий в этой вершине).

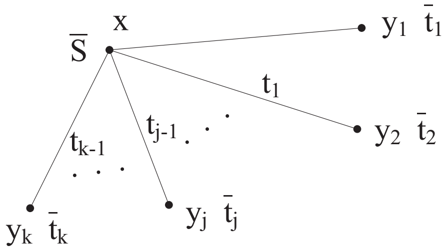
  Построим две последовательности:

  $y_1, \ldots, y_k$ — последовательность вершин графа H;

  $t_1, \ldots, t_k$ — последовательность цветов.

1. $e_i = (x, y_i) \in E(H)$;
2. t_i отсутствует в вершине y_i;
3. $\psi(e_{i+1}) = t_i$.

Построим максимальные такие последовательности:



Последовательность оборвется, то есть мы не сможем найти нового ребра e_{k+1}, по двум причинам:

1. Нет ребра $(x, y) \in E(H)$, для которого $\psi((x, y)) = t_k$;
   В этом случае перекрасим ребра пучка $\psi(e_i) = t_i, i = 1, \ldots, k$.
   Новая раскраска является правильной, так как цвета, присутствующие в вершине x не изменились $\Rightarrow$ получили раскраску $H \cup \{e_1\} = G$ в $(\Delta(G) + 1)$ цвет.
2. Существует ребро $(x, y) \in E(H) \bigm| \psi((x, y)) = t_k$, но $(x, e) = e_j$ (то есть это ребро мы уже проходили).
   Эту проблему решаем методом перекраски двухцветных цепей.
   $\exists (x, y) \in E(H) \bigm| \psi((x, y)) = t_k \Rightarrow (x, y) = e_j$, где $y = y_j$.
   Перекрасим $e_1, \ldots, e_{j-1}$ $\psi(e_i) = t_i,\ i = 1, \ldots, j - 1$.
   Рассмотрим подграф F графа H, состоящий из ребер цветов S и $t_k = \psi(e_j) = t_{j-1}$.
   В F все вершины степени $\leqslant 2 \Rightarrow$ компоненты связности F — это либо простые циклы, либо простые цепи.
   $$\left.\begin{array}{l} deg_F\ x \leqslant 1 \\ deg_F\ y_j \leqslant 1, e_j \text{не окрашена} \\ deg_F\ y_k \leqslant 1 \end{array}\right\} \Rightarrow x, y_j, y_k \text{ не содержатся в одной компоненте связности графа } F.$$
   Рассмотрим возможные варианты:
   (a) x, y_j содержатся в разных компонентах графа $F \Rightarrow$ в компоненте, содержащей y_j, поменяем местами цвета s и $t_k \Rightarrow$ тогда цвет s будет отсутствовать и в x, и в $y_j \Rightarrow \psi(e_j) := s \Rightarrow$ получили раскраску графа $G = H \cup \{e_1\}$ в $\Delta(G) + 1)$ цветов.
   (b) x, y_k в разных компонентах связности F.
   $\psi(e_1) = t_i,\ i = j, \ldots, k - 1$.
   Надо покрасить e_k.
   При этой перекраски ребра F не затронуты.
   Поменяем цвета s и t_k в компоненте F, содержащей вершину $y_k \Rightarrow s$ отсутствует в $x, y_k \Rightarrow \psi(e_k) := s \Rightarrow$ получили правильную раскраску G в $(\Delta(G) + 1)$ цвет.

Значит, предположение, что G не раскрашивается в $(\Delta(G) + 1)$ цвет неверно.

□

Теорема 3.8.2.4 (Кенига).

▷ Если граф G — двудольный $\Rightarrow \chi'(G) = \Delta(G)$.

Упражнение.

3.8.3 Раскраска граней плоских графов

ОПР 3.8.3.1 (Карта).
Карта - *плоский связный мультиграф, без мостов.*

ОПР 3.8.3.2 (Раскраска карты).
Пусть F — множество граней карты G.
Тогда отображение $\varphi : F \to \{1, \ldots, k\}$ — правильная k-раскраска, если любые две грани, имеющие общую границу ненулевой длины, окрашены в разные цвета.

Теорема 3.8.3.3 (Четырех красок).

▷ Любая карта 4-раскрашиваемая.

Без доказательства.

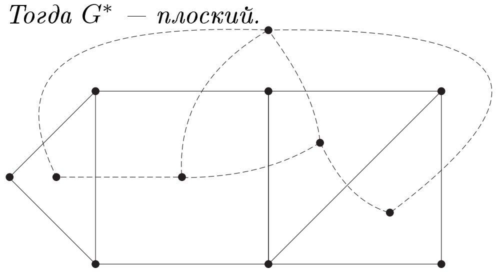
ОПР 3.8.3.4 (Карта, геометрически двойственный к данной).

Пусть G — карта. Построим карту $G*$ геометрически двойственную к G.

$V^* = \{x \in f \bigm| f \in F\}$ *— в каждой грани графа G выберем по одной вершине.*

Две вершины $x, y \in V^*$, соединим ребром, пересекающим только одно ребро G, если соответствующие грани имеют границу ненулевой длины.

Тогда G^* — плоский.



Теорема 3.8.3.5.

▷ G — планарный $\Rightarrow$ $\chi(G) \leqslant 5$.

Упражнение.

ОПР 3.8.3.6 (Свойства графов).

Пусть $J(n)$ — множество помеченных графов на n вершинах, то есть множество вершин у этих графов $V = \{1, \ldots, n\}$.

p — некоторое свойство графов.

$P(n)$ — множество графов из $J(n)$, удовлетворяющих свойству p.

Будем говорить, что почти все графы обладают свойством p, *если* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|P(n)|}{|J(n)|} = 1$.

Обозначается $\not\forall$.

1. $\not\forall$ G *связны;*
2. $\not\forall$ G $d(G) = 2$;
3. $\not\forall$ G $r(G) = d(G) = 2$;
4. $\not\forall$ G $\exists! v \in V(G) \bigm| deg\ v = \Delta(G)$ $(deg\ v = \delta(G))$;
5. $\not\forall$ G G *— двусвязный;*
6. $\not\forall$ G G *не имеет мостов;*
7. $\not\forall$ G G *не является планарным;*
8. $\not\forall$ G G *не является Эйлеровым;*
9. $\not\forall$ G G *— Гамильтонов;*
10. $\not\forall$ G $\chi(G) \sim \frac{n}{2}\log_2 n$;
11. $\not\forall$ G $\chi'(G) = \Delta(G)$.